

Partiel de TS345 : Codage de canal avancé

Romain Tajan

22 novembre 2021

Table des matières

1	Code LDPC	2
2	Décodage BP sur canal à effacements binaires	3

Cette épreuve durera **1 heure** et sera **sans document** et **sans calculatrice**.
Votre copie doit être aussi propre et aussi claire que possible. Toute ambiguïté, rature ou phrase illisible jouera en votre défaveur. Toute réponse doit être accompagnée d'une justification. Rendre le sujet avec votre copie.

1 Code LDPC

Cet examen considère l'analyse d'un code binaire dont la matrice de parité, notée H , est donnée ci-dessous

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 1. Pour le code ainsi défini, donner la taille des mots de codes n , la taille des messages k , le rendement du code.

Question 2. Donner une matrice génératrice systématique G pour ce code.

Question 3. Encoder le message $\mathbf{u} = [1 \ 0 \ 1]$

Question 4. Ce code est-il régulier ? Donner les polynômes $\lambda(x)$ et $\rho(x)$.

Question 5. Calculer le rendement de design, le comparer au rendement trouvé à la Question 1.

Question 6. Donner les équations de parités associées à la matrice H .

Question 7. Dessiner le graphe de Tanner associé à la matrice H .

Question 8. Donner une maille de du graphe de Tanner précédent (plus petit cycle).

Question 9. Le décodage par propagation de croyances est-il équivalent au décodage du Maximum-A-Posteriori bit (MAP-bit) pour cette matrice H ?

2 Décodage BP sur canal à effacements binaires

Pour cette section, nous considérerons le décodage **du code défini dans la section précédente** pour le canal binaire à effacements (canal BEC) défini décrit dans la Figure 1 ci-dessous.

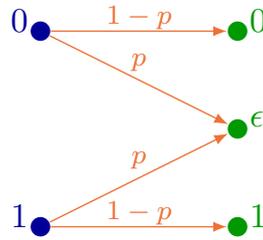


FIGURE 1

Question 10. Dans l'algorithme de propagation de croyances (BP), donner le calcul des messages sortant du nœud c_i ($L_{c_i \rightarrow x_j}$) à partir des messages arrivant au nœud c_i (i.e. les messages $L_{x_j \rightarrow c_i}$).

Question 11. Donner le calcul des messages sortant du nœud x_j ($L_{x_j \rightarrow c_i}$) à partir des messages arrivant au nœud x_j (i.e. les messages $L_{c_i \rightarrow x_j}$).

On souhaite maintenant réduire la complexité de l'algorithme BP sur canal BEC. Pour cela, nous souhaitons montrer que les messages sur le canal BEC, ne peuvent prendre que 3 valeurs 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Question 12. Commençons par les LLRs liés au canal. Pour le canal BEC décrit en figure 1, démontrer les identités suivantes :

- $\mathbb{P}(X_j = 0|Y_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = 1|Y_j = 0) = 0$
- $\mathbb{P}(X_j = 0|Y_j = 0) = \mathbb{P}(X_j = 1|Y_j = 1) = 1$
- $\mathbb{P}(X_j = 0|Y_j = \epsilon) = \mathbb{P}(X_j = 1|Y_j = \epsilon) = 0.5$

en déduire les valeurs possibles pour les LLRs suivants :

$$L_j(y_j) = \log \left(\frac{p(X_j = 0|Y_j = y_j)}{p(X_j = 1|Y_j = y_j)} \right).$$

Question 13. Déduire de la question précédente, les valeurs possibles pour les LLRs allant des nœuds de variables vers les nœuds de parités lors de la 1ère itération.

Question 14. En supposant que les messages $L_{x_j \rightarrow c_i}$ sont dans l'ensemble $0, \pm\infty$, montrer que les messages $L_{c_i \rightarrow x_j}$ restent dans le même ensemble.

Question 15. Simplifier les calculs de BP réalisés aux nœuds de parités ainsi qu'aux nœuds de variables en se basant sur l'hypothèse que les messages sont dans l'ensemble $0, \pm\infty$.

Question 16. Montrer pourquoi l'algorithme BP de la question précédente ne peut introduire que des effacements mais pas d'erreur lors du décodage.

Question 17. Décoder le message suivant $[\epsilon\epsilon 11\epsilon 01]$ avec l'algorithme BP. BP permet-il de résoudre tous ces effacements? **Justifier votre réponse.**

Question 18. Même question avec le message reçu suivant : $[1\epsilon 11\epsilon\epsilon 1]$. Commenter ce résultat.

Question 19. Montrer que tout schéma de 2 effacements peut être résolu avec BP.