

Les codes polaires

De la polarisation du canal au 5G NR

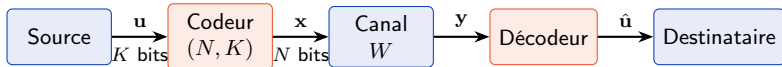
Romain Tajan

13 octobre 2026

Plan

- ① Codage de canal
- ② Polarisation du canal
- ③ Encodage
- ④ Théorie
- ⑤ Construction
- ⑥ Décodage
- ⑦ Performances
- ⑧ Extensions

La chaîne de communication



- Le canal $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est bruité : on ne reçoit pas ce qu'on a envoyé.
- On ajoute de la **redondance** : K bits d'information $\rightarrow N$ bits codés.
- Rendement $R = K/N$; probabilité d'erreur par bloc $P_e = \mathbb{P}(\hat{\mathbf{u}} \neq \mathbf{u})$.

Le théorème du codage de canal (Shannon, 1948)

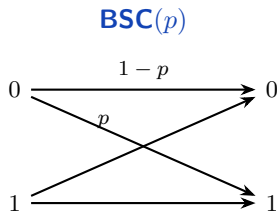
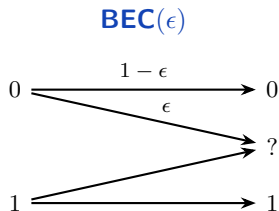
Capacité

$$C(W) = \max_{P_X} I(X; Y) \quad (\text{bits par utilisation du canal})$$

Théorème

- Si $R < C$: il existe des codes de rendement R avec $P_e \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.
- Si $R > C$: P_e est bornée inférieurement par une constante > 0 .
- Preuve par codage aléatoire : **non constructive**, décodage de complexité exponentielle.
- Depuis 1948 : trouver des codes **explicites**, à complexité raisonnable, qui atteignent C .

Trois canaux binaires de référence



BI-AWGN : $y = (1 - 2x) + \sigma n$, $n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\text{LLR} = \ln \frac{W(y|0)}{W(y|1)} = \frac{2y}{\sigma^2}$.

Les trois sont **symétriques** : $W(y|0) = W(-y|1)$.

Capacités

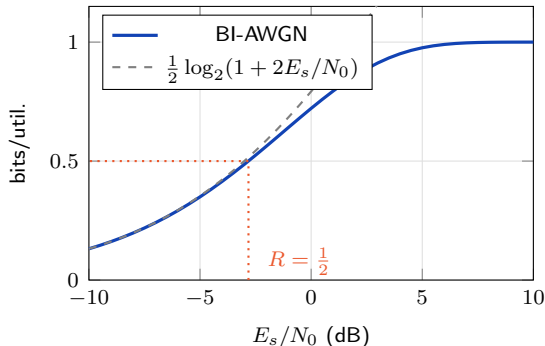
$$C_{\text{BEC}} = 1 - \epsilon$$

$$C_{\text{BSC}} = 1 - h_2(p)$$

$$C_{\text{BI-AWGN}} = 1 - \mathbb{E}[\log_2(1 + e^{-L})]$$

avec $L \sim \mathcal{N}(\frac{2}{\sigma^2}, \frac{4}{\sigma^2})$ sachant $x = 0$.

$R = \frac{1}{2}$: il faut $E_b/N_0 \geq 0,19$ dB en BI-AWGN.



Codes en blocs linéaires

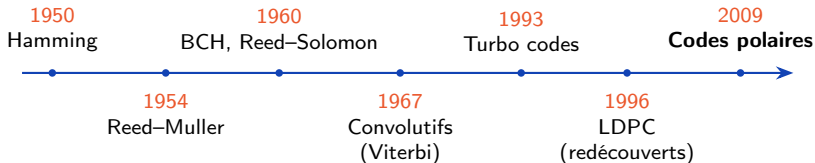
- Code (N, K) linéaire sur $\mathbb{F}_2$: $\mathbf{x} = \mathbf{u} \mathbf{G}$, avec $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_2^{K \times N}$.
- Distance minimale $d_{\min}$: poids minimal d'un mot non nul. Corrige $\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$ erreurs.
- Décodage au maximum de vraisemblance (ML) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$$

NP-difficile en général : on cherche des structures permettant un décodage efficace.

- Mesures de performance : taux d'erreur bloc (BLER), taux d'erreur binaire (BER), en fonction de E_b/N_0 .

Un demi-siècle de codes correcteurs



- Turbo/LDPC : performances proches de la capacité, mais **sans preuve** générale d'atteinte de la capacité.
- Codes polaires : première famille **prouvée** atteindre la capacité, avec encodage/décodage en $O(N \log N)$.

Les codes polaires en bref

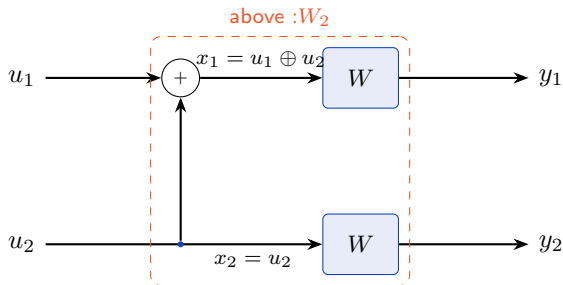
Arikan (2009)

Pour tout canal binaire symétrique à entrée discrète, la **transformation polaire** de $N = 2^n$ copies du canal produit des canaux synthétiques qui deviennent soit **parfaits**, soit **inutiles**.

- On envoie l'information sur les bons canaux ; on **gèle** (valeur connue) les mauvais.
- Atteint la capacité ; $P_e \leq 2^{-N^\beta}$ pour tout $\beta < \frac{1}{2}$.
- Utilisé dans la 5G NR (3GPP Release 15) pour les canaux de contrôle.

Objectifs : comprendre (i) pourquoi la polarisation a lieu, (ii) comment construire et décoder un code polaire, (iii) ce qu'on obtient à longueur finie.

Idée : combiner deux copies du canal



$$W_2(y_1, y_2 | u_1, u_2) = W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2)$$

Transformation inversible : $I(U_1 U_2; Y_1 Y_2) = I(X_1 X_2; Y_1 Y_2) = 2 I(W)$ (entrée uniforme).

Séparer : deux canaux synthétiques

Règle de la chaîne (théorie de l'information) :

$$2 I(W) = I(U_1; Y_1 Y_2) + I(U_2; Y_1 Y_2 | U_1)$$

Canal « moins » : on décode u_1 sans connaître u_2

$$W^-(y_1, y_2 | u_1) = \frac{1}{2} \sum_{u_2} W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2)$$

Canal « plus » : on décode u_2 en connaissant u_1

$$W^+(y_1, y_2, u_1 | u_2) = \frac{1}{2} W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2)$$

$$I(W^-) + I(W^+) = 2 I(W), \quad I(W^-) \leq I(W) \leq I(W^+)$$

La capacité totale est **conservée**, mais **redistribuée**.

Le cas du canal à effacement (BEC)

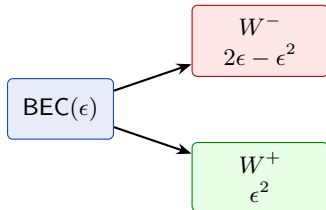
Soit $W = \text{BEC}(\epsilon)$.

- $u_1 = y_1 \oplus y_2$: connu si et seulement si **les deux** sorties sont reçues.

$$W^- = \text{BEC}(2\epsilon - \epsilon^2)$$

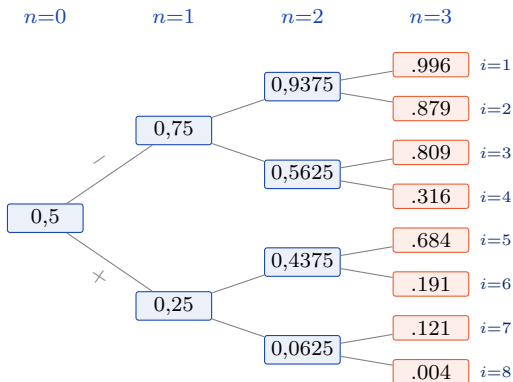
- u_2 : on a y_2 , et aussi $y_1 \oplus u_1$: il faut que **les deux** soient effacés.

$$W^+ = \text{BEC}(\epsilon^2)$$



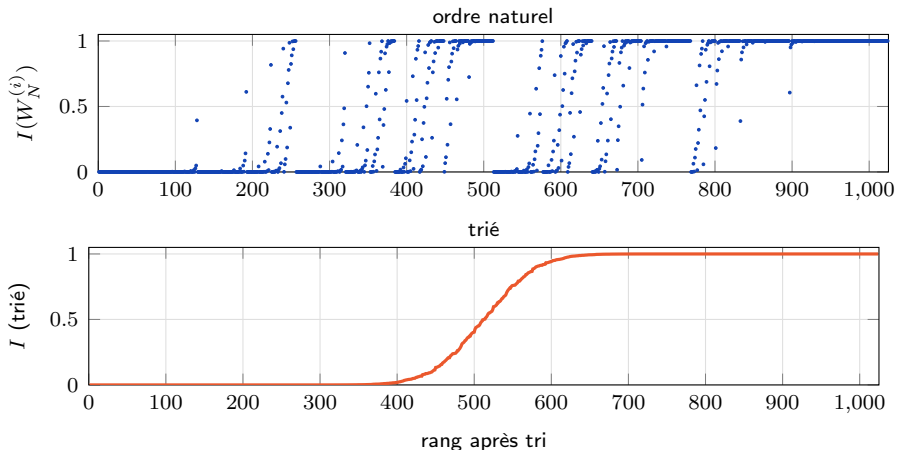
$\epsilon = 0,5$:
 $\epsilon^- = 0,75$, $\epsilon^+ = 0,25$
 capacités : 0,25 et 0,75
 (somme = 1 = 2 · 0,5 ✓)

Itérer : l'arbre de polarisation



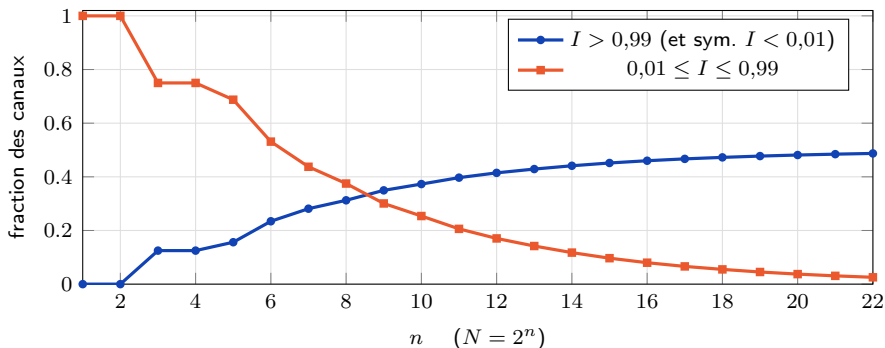
Probabilités d'effacement ϵ_i des canaux synthétiques ($\epsilon_0 = 0,5$) : $\epsilon \mapsto 2\epsilon - \epsilon^2$ (branche -, en haut) ou $\epsilon \mapsto \epsilon^2$ (branche +).

La polarisation à $N = 1024$



Pour $\epsilon = 0,5$, $C = 0,5$: environ la moitié des indices ont I proche de 1.

Quelle fraction est polarisée ?



BEC(0,5) : la fraction de canaux non polarisés tend vers 0 **lentement**.

Théorème de polarisation (Arikan, 2009)

Théorème

Soit W un canal binaire symétrique sans mémoire, $N = 2^n$. Pour tout $\delta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \#\{i : I(W_N^{(i)}) > 1 - \delta\} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} I(W) \\ \frac{1}{N} \#\{i : I(W_N^{(i)}) < \delta\} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - I(W)\end{aligned}$$

- Les canaux **bons** (fraction $\approx I(W)$) portent l'information.
- Les canaux **mauvais** (fraction $\approx 1 - I(W)$) reçoivent des bits gelés.
- Démonstration : voir partie 4 (martingale).

La transformation polaire

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_N = \mathbf{F}^{\otimes n} \quad (N = 2^n), \quad \mathbf{x} = \mathbf{u} \mathbf{G}_N$$

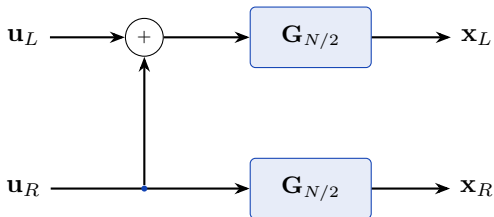
$$\mathbf{G}_4 = \mathbf{F}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus u_4 \\ x_2 = u_2 \oplus u_4 \\ x_3 = u_3 \oplus u_4 \\ x_4 = u_4 \end{cases}$$

- Convention de cet exposé : pas de permutation « bit-reversal » (Arikan : $\mathbf{G}_N = B_N \mathbf{F}^{\otimes n}$) ; elle ne change que l'ordre des indices.
- Matrice inversible, involutive : $\mathbf{G}_N^{-1} = \mathbf{G}_N$ sur $\mathbb{F}_2$.

Structure réursive

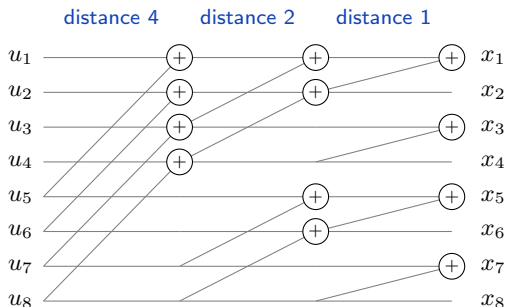
Pour $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ avec $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R \in \mathbb{F}_2^{N/2}$:

$$\mathbf{x} = \left((\mathbf{u}_L \oplus \mathbf{u}_R) \mathbf{G}_{N/2}, \mathbf{u}_R \mathbf{G}_{N/2} \right)$$



Complexité : $\frac{N}{2} \log_2 N$ XOR. $O(N \log N)$.

Graphe papillon ($N = 8$)



$n = 3$ étapes; chaque étape applique $\mathbf{F}$ sur des paires d'indices (distance $N/2, N/4, \dots, 1$).

Choisir quoi transmettre : l'ensemble d'information

- On choisit $\mathcal{A} \subset \{1, \dots, N\}$, $|\mathcal{A}| = K$: indices **d'information**. Les autres ($\mathcal{A}^c$) sont **gelés** à 0.
- Mot de code : $\mathbf{x} = \mathbf{u} \mathbf{G}_N$ avec $\mathbf{u}_{\mathcal{A}} =$ données, $\mathbf{u}_{\mathcal{A}^c} = \mathbf{0}$.
- C'est un code linéaire : **sous-matrice de $\mathbf{G}_N$** formée des lignes d'indices dans $\mathcal{A}$.
- Rendement $R = K/N$.

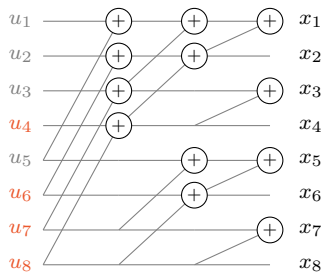
Principe de construction

$\mathcal{A}$ = les K indices des **meilleurs** canaux synthétiques $W_N^{(i)}$.

Pourquoi geler ?

Le décodeur connaît u_i pour $i \in \mathcal{A}^c$: ces bits n'ajoutent pas d'erreur et **aident** les suivants.

Exemple $N = 8$, $K = 4$ (BEC(0,5))



i	ϵ_i	rôle
1	.996	gelé
2	.879	gelé
3	.809	gelé
4	.316	info
5	.684	gelé
6	.191	info
7	.121	info
8	.004	info

$\mathcal{A} = \{4, 6, 7, 8\}$ (4 plus petits ϵ_i).

Matrice génératrice et distance

Lignes 4, 6, 7, 8 de $\mathbf{G}_8$:

$$\mathbf{G}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- C'est le code de **Reed–Muller** $\text{RM}(1, 3) = \text{Hamming étendu } [8, 4, 4]$.
- Le poids de la ligne i de $\mathbf{G}_N$ est $2^{\text{wt}(i-1)}$ (wt = poids de Hamming de l'écriture binaire).
- $d_{\min}(\mathcal{A}) = \min_{i \in \mathcal{A}} 2^{\text{wt}(i-1)}$.

Reed–Muller vs polaire

RM : on choisit les lignes de **poids** élevé ; polaire : celles de **fiabilité** élevée.

Paramètre de Bhattacharyya

$$Z(W) = \sum_y \sqrt{W(y|0) W(y|1)} \in [0, 1]$$

Mesure de « mauvaise qualité » : $Z = 0$ canal parfait, $Z = 1$ canal inutile.

Propriétés

- Erreur ML sur 1 bit : $P_e(W) \leq Z(W)$.
- $I(W) \geq \log_2 \frac{2}{1+Z(W)}$ et $I(W) \leq \sqrt{1 - Z(W)^2}$.
- BEC(ϵ) : $Z = \epsilon$.

Transformation (Arikan)

$$Z(W^+) = Z(W)^2, \quad Z(W^-) \leq 2Z(W) - Z(W)^2 \text{ (égalité pour le BEC),} \\ Z(W^-) \geq Z(W).$$

Pourquoi la polarisation a lieu ?

On tire $B_1, B_2, \dots$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{-, +\}$ et on pose $W_0 = W$, $W_{k+1} = W_k^{B_{k+1}}$, $I_k = I(W_k)$.

- $\mathbb{E}[I_{k+1} | W_k] = \frac{1}{2}(I(W_k^-) + I(W_k^+)) = I_k$: **martingale bornée**.
- Donc $I_k \rightarrow I_\infty$ presque sûrement (et dans L^1).
- Convergence $\Rightarrow |I_{k+1} - I_k| \rightarrow 0$. Or
 $|I_{k+1} - I_k| = \frac{1}{2}(I(W_k^+) - I(W_k^-))$.
- Cas BEC(ϵ) : $I(W^+) - I(W^-) = (1 - \epsilon^2) - (1 - \epsilon)^2 = 2\epsilon(1 - \epsilon)$, nul si et seulement si $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Conclusion

$I_\infty \in \{0, 1\}$ p.s., et $\mathbb{E}[I_\infty] = I_0 = I(W)$ donc $\mathbb{P}(I_\infty = 1) = I(W)$.

Les codes polaires atteignent la capacité

Pour tout $R < I(W)$ et $\beta < \frac{1}{2}$, la suite de codes polaires de rendement R , construits avec les $\lfloor NR \rfloor$ canaux de plus petit Z , vérifie sous décodage SC

$$P_e = o\left(2^{-N^\beta}\right)$$

- Construction **explicite**.
- Encodage et décodage SC en $O(N \log N)$.
- **Mais** : l'asymptotique cache une convergence lente à longueur finie $\rightarrow$ exposant d'échelle.

Le problème de construction

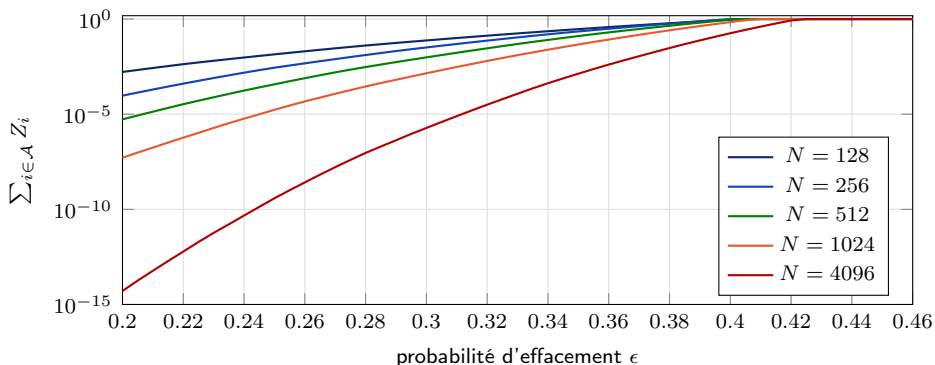
- Données : canal W , longueur N , dimension K .
- Objectif : choisir $\mathcal{A}$ minimisant P_e sous décodage SC.
- Borne d'union : $P_e(\text{SC}) \leq \sum_{i \in \mathcal{A}} Z(W_N^{(i)}) \Rightarrow$ choisir les K plus petits Z .

Difficulté

Hors BEC, les canaux $W_N^{(i)}$ ont des alphabets de sortie de taille **exponentielle** : on ne peut pas calculer $Z(W_N^{(i)})$ exactement.

- BEC : récursion exacte $Z \mapsto 2Z - Z^2, Z^2$.
- Général : évolution de densités (Mori–Tanaka), quantification (Tal–Vardy), approximation gaussienne (Trifonov).

Borne sur la probabilité d'erreur (BEC, $R = \frac{1}{2}$)



Borne d'union calculée exactement. Capacité : $\epsilon = 0,5$. Plus N grandit, plus la chute est raide.

Constructions universelles et 5G

- Il existe des relations d'ordre valables pour tous les canaux (domination, échanges de bits) : déterminées par l'écriture binaire de i .
- Poids de polarisation (He et al., 2017) : $w_i = \sum_j b_j \beta^j$, $\beta = 2^{1/4}$; classer les indices par w_i .
- 5G NR : une **séquence de fiabilité unique** de longueur 1024 (TS 38.212) fournit $\mathcal{A}$ pour toute longueur $N \leq 1024$ par extraction.

Compromis

Construction adaptée au canal $\rightarrow$ meilleure performance ; séquence universelle $\rightarrow$ simplicité, standardisation, pas de signalisation.

Décodage par annulation successive (SC)

On estime $u_1, u_2, \dots, u_N$ dans l'ordre, chaque décision utilisant les précédentes :

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0 & i \in \mathcal{A}^c \quad (\text{valeur gelée}) \\ \arg \max_u W_N^{(i)}(\mathbf{y}, \hat{u}_1^{i-1} | u) & i \in \mathcal{A} \end{cases}$$

- En domaine LLR : $\hat{u}_i = 0$ si $L_N^{(i)} \geq 0$, 1 sinon.
- Les LLR $L_N^{(i)}$ se calculent par une **réursion** de complexité $O(N \log N)$ au total.

Pourquoi ça marche

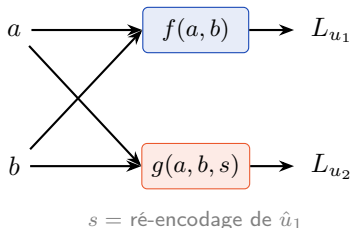
Une décision correcte sur $u_1, \dots, u_{i-1}$ transforme le canal en $W_N^{(i)}$: c'est pourquoi la polarisation s'applique.

Les deux fonctions du décodeur

Deux LLR a, b (de x_1 et x_2) :

$$f(a, b) = 2 \operatorname{atanh}\left(\tanh \frac{a}{2} \tanh \frac{b}{2}\right) \\ \approx \operatorname{sign}(a) \operatorname{sign}(b) \min(|a|, |b|)$$

$$g(a, b, s) = b + (-1)^s a$$



- f : LLR de $u_1 = x_1 \oplus x_2$ (nœud de parité).
- g : LLR de $u_2 = x_2$ sachant $u_1 = s$ (nœud de répétition).

Récursion pour $N = 2^n$

On calcule les LLR de $(u_1, \dots, u_N)$ à partir du vecteur de LLR canal $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$:

Moitié gauche $\mathbf{u}_L = (u_1, \dots, u_{N/2})$

$\lambda_j^L = f(\lambda_j, \lambda_{j+N/2})$, $j \leq N/2$; on décode $\mathbf{u}_L$ avec un décodeur de taille $N/2$.

Moitié droite $\mathbf{u}_R$

$s = \hat{\mathbf{u}}_L \mathbf{G}_{N/2}$ (ré-encodage), puis $\lambda_j^R = g(\lambda_j, \lambda_{j+N/2}, s_j)$; on décode $\mathbf{u}_R$ avec un décodeur de taille $N/2$.

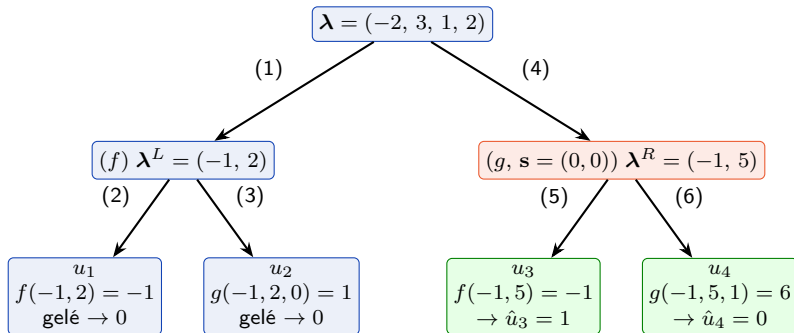
- Cas de base $N = 1$: $L = \lambda_1$, décision dure (ou valeur gelée).
- Coût $T(N) = 2T(N/2) + O(N) = O(N \log N)$, mémoire $O(N)$.

Exemple $N = 4$, $K = 2$: données

- $\mathcal{A} = \{3, 4\}$, $u_1 = u_2 = 0$ gelés. (cf. ϵ : .938, .563, .438, .063)
- Message : $(u_3, u_4) = (1, 0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0, 0, 1, 0)$,
 $\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{G}_4 = (1, 0, 1, 0)$.
- LLR reçus $\boldsymbol{\lambda} = (-2, 3, 1, 2)$:

j	1	2	3	4
x_j	1	0	1	0
λ_j	-2	3	+1	2

Le troisième LLR a le **mauvais signe** ($x_3 = 1$ mais $\lambda_3 > 0$) : une erreur de canal.
 Le décodeur la corrigera-t-il ?

Exemple $N = 4$: déroulement

Résultat : $\hat{\mathbf{u}} = (0, 0, 1, 0)$ ✓ — l'erreur sur λ_3 est **corrigée** car elle est compensée par λ_1 dans g .

Exemple $N = 4$: le détail des calculs

- ❶ $\lambda^L = (f(-2, 1), f(3, 2)) = (-1, 2)$
- ❷ $u_1 : f(-1, 2) = -1$; gelé $\Rightarrow \hat{u}_1 = 0$ (même si $L < 0$).
- ❸ $u_2 : g(-1, 2, \hat{u}_1=0) = 2 + (-1) = 1$; gelé $\Rightarrow \hat{u}_2 = 0$.
- ❹ Ré-encodage : $\mathbf{s} = (\hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2, \hat{u}_2) = (0, 0)$.
- ❺ $\lambda^R = (g(-2, 1, 0), g(3, 2, 0)) = (1 - 2, 2 + 3) = (-1, 5)$
- ❻ $u_3 : f(-1, 5) = -1 < 0 \Rightarrow \hat{u}_3 = 1$.
- ❼ $u_4 : g(-1, 5, 1) = 5 - (-1) = 6 > 0 \Rightarrow \hat{u}_4 = 0$.

Les bits gelés u_1, u_2 nous ont donné $\mathbf{s} = (0, 0)$ sans erreur possible : λ_3 combiné avec λ_1 ($1 - 2 = -1$) donne le bon signe.

Complexité et latence

- Temps : $O(N \log N)$ opérations ; mémoire : $O(N)$.
- Latence : $\approx 2N - 2$ pas de temps même avec un matériel parallèle (décodage **séquentiel** bit à bit).
- Propagation d'erreurs : une mauvaise décision de $\hat{u}_i$ **détruit** la décision suivante.

Limites du SC

À longueur finie, les canaux ne sont pas parfaitement polarisés : le SC seul est décevant pour N modéré (cf. simulation).

Remède

Ne pas décider tout de suite : garder plusieurs hypothèses $\rightarrow$ **décodage par liste**.

Décodage par liste (SCL, Tal–Vardy 2011)

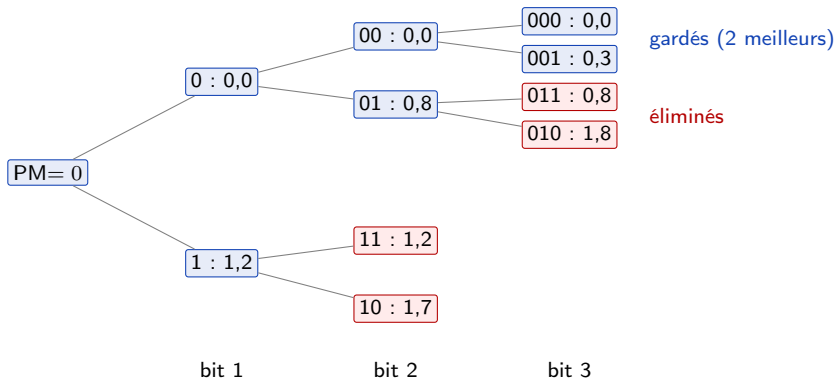
- On garde jusqu'à L chemins (hypothèses sur $\hat{u}_1^i$).
- Pour chaque bit d'information : chaque chemin se **dédoube** (0 et 1), puis on garde les L meilleurs.
- Évaluation d'un chemin : métrique PM (somme de pénalités) :

$$PM_i = PM_{i-1} + \begin{cases} |L_i| & \text{si la décision contredit le signe de } L_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Bits gelés : pas de dédoublement, seule la pénalité est mise à jour.
- Fin : on retient le chemin de PM minimale.

Coût : $O(L N \log N)$.

Arbre de recherche SCL ($L = 2$) — exemple illustratif



PM = métrique de chemin (plus petit = meilleur). Valeurs choisies pour illustrer l'élagage.

SCL assisté par CRC (Niu–Chen, 2012)

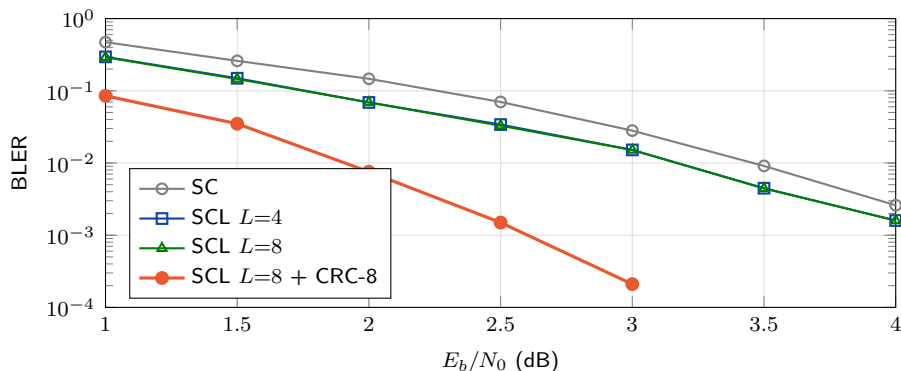
- On ajoute un CRC aux K bits d'information (par ex. 8 bits), puis on encode avec le code polaire.
- En fin de SCL on parcourt la liste par PM croissante et on retient le **premier chemin dont le CRC est valide**.
- Le CRC joue le rôle d'un code externe : il **discrimine** le vrai chemin parmi L candidats.

Effet

La liste contient souvent le bon mot de code sans que ce soit le plus probable pour le SC ; le CRC le repère. Gain important à L donné.

Rendement effectif : $(K - 8)/N$ si on garde K bits au total.

Simulation : $N = 128$, $K = 64$, BI-AWGN



Construction gaussienne à 2 dB ; min-sum ; points avec ≥ 20 erreurs. E_b/N_0 défini avec $R = \frac{1}{2}$; la courbe CRC code 56 bits utiles + CRC-8.

Lecture des résultats

Décodeur	E_b/N_0 pour BLER = 10^{-2}
SC	3,46 dB
SCL $L = 4$ ou 8	3,17 dB
SCL $L = 8$ + CRC-8	1,91 dB

- SCL : gain d'environ 0,3 dB sur SC ; $L = 4$ et $L = 8$ sont indiscernables ici.
- CRC-8 : gain bien plus fort ; en tenant compte du rendement 56/128 au lieu de $\frac{1}{2}$ (+0,58 dB), il reste ≈ 1 dB de gain sur SC.

Limites

Un seul code ($N = 128$, $K = 64$), un seul canal ; pas de comparaison avec LDPC/turbo dans cet exposé (voir la littérature, p. ex. Bioglio et al.).

Distance minimale et spectre

- $d_{\min} = \min_{i \in \mathcal{A}} 2^{\text{wt}(i-1)}$: souvent faible pour une construction « par fiabilité ».
- Code simulé ($N = 128$, $K = 64$, construction gaussienne) : $d_{\min} = 8$; RM(3, 7) aurait $d_{\min} = 16$.
- Sous ML, $P_e \approx A_d Q(\sqrt{2dR E_b/N_0})$ dominé par les mots de poids d : leur **nombre** A_d compte.
- Le CRC **augmente la distance effective** de la liste candidate.

Reed–Muller vs polaire

RM : $d_{\min}$ maximal mais mauvais pour SC ; polaire : $d_{\min}$ modeste mais SC performant ; compromis possible : « polar–RM » (Mondelli–Hassani–Urbanke).

Les codes polaires dans la 5G NR

- 3GPP Release 15 : codes polaires pour les canaux de **contrôle** eMBB (DCI, UCI, PBCH) ; LDPC pour les données.
- $N_{\max} = 512$ (voie descendante), 1024 (montante) ; $N = 2^n$ choisi selon K et E .
- CRC (6, 11 ou 24 bits selon le cas) ; bits de parité (PC-polar) pour certaines tailles.
- **Séquence de fiabilité** unique ; entrelaceur et adaptation de débit (poinçonnage, raccourcissement, répétition).
- Décodage laissé à l'implémentation (SCL avec CRC en pratique).

Voir Bioglio–Condo–Land, « Design of polar codes in 5G New Radio » (2021).

Variantes et généralisations

- **Noyaux plus grands** $\ell \times \ell$: exposant $E(\mathbf{G})$; aucun noyau de taille ≤ 14 ne bat $\frac{1}{2}$; $E = 0,518$ pour $\ell = 16$ (Korada et al.).
- **Alphabets non binaires** : polarisation pour tout canal discret sans mémoire (Şaşoğlu–Telatar–Arikan).
- **Codes PAC** (Arikan, 2019) : pré-transformation convolutive + décodage séquentiel : proches des bornes à $N = 128$.
- **Autres problèmes** : codage de source, canal à écoute (wiretap), canal à accès multiple, stockage.
- **Codes polaires concaténés / couplés** pour grandes longueurs.

Conclusion

Ce qu'il faut retenir

- **Polarisation** : $W \rightarrow (W^-, W^+)$ conserve la capacité, augmente le contraste ; itérée, les canaux deviennent parfaits ou inutiles.
- **Code** = lignes de $\mathbf{G}_N = \mathbf{F}^{\otimes n}$ sur les bons canaux ; encodage $O(N \log N)$.
- **Décodage** SC en $O(N \log N)$; SCL + CRC pour les longueurs pratiques.
- **Théorie** : capacité atteinte, $P_e \leq 2^{-N^\beta}$, $\beta < \frac{1}{2}$.

Questions ouvertes

Meilleurs noyaux, décodeurs à faible latence, grandes longueurs, PAC / polar-RM, co-conception avec les modulations.