

# TD de communications numériques

## Transmissions en bande de base

### module TS227 – année 2020/2021

Guillaume Ferré et Romain Tajan

L'architecture bande de base à considérer dans ces travaux dirigés est présentée sur la figure 1.

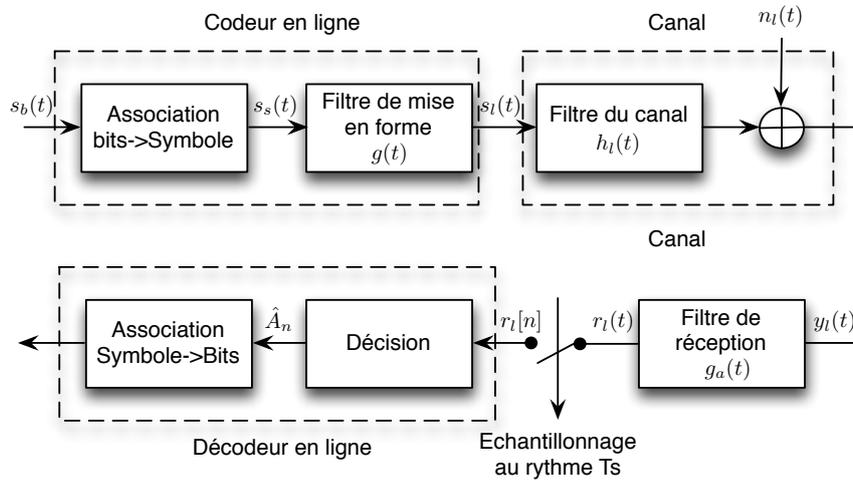


FIGURE 1 – Architecture Bande de base simplifiée

## 1 Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM

Dans cet exercice, on considère un modulateur numérique 8-PAM utilisant un étiquetage de Gray.

**Question 1.** Pour cette modulation, que valent le **nombre de symboles**  $M$  et le **nombre de bits par symboles**  $n_b$ . Dans le cas général, quelle est la relation entre ces deux grandeurs.

De façon générale, pour une  $M$ -PAM,  $M$ -QAM,  $M$ -PSK,  $M$  représente le **nombre de symboles**. Le **nombre de bits par symboles** est alors donné par la relation

$$n_b = \log_2(M)$$

en effet, les nombre de symboles pouvant être indexés par des étiquettes différentes de  $n_b$  bits est  $M = 2^{n_b}$ . Dans le cas d'une 8-PAM, il y a donc 8 symboles et  $n_b = 3$  bits par symboles.

**Question 2.** Représenter la **constellation des symboles** (ensemble des symboles dans le plan complexe). Faire apparaître sur ce schéma, les étiquettes binaires associées à chacun des symboles d'un étiquetage de Gray.

Pour une 8-PAM, les symboles possibles sont  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ . Le diagramme de constellation est donné en Figure

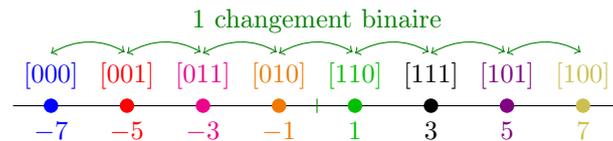


FIGURE 2 – Constellation d'une modulation 8-PAM avec étiquetage de Gray.

Cette modulation ne contient que des symboles réels (i.e. dans  $\mathbb{R}$ ). Certaines modulations numériques possèdent des symboles complexes (i.e. dans  $\mathbb{C}$ ), par exemple les  $M$ -PSK,  $M$ -QAM, ou plus généralement les modulations  $M$ -APSK.

L'étiquetage de Gray est garanti par le fait que deux étiquettes attribuées à des symboles voisins ne diffèrent que par au plus 1 bit. L'étiquetage proposé n'est pas le seul étiquetage de Gray, en effet, toute permutation des étiquettes va fonctionner.

Supposons maintenant que ces symboles sont transmis dans un canal à bruit blanc additif gaussien. Parmi tous les étiquetages possibles, les étiquetages de Gray permettent de minimiser la probabilité d'erreur binaire à probabilité d'erreur symbole donnée. En effet, les erreurs au niveau des symboles les plus probables (celles entre voisins immédiats) n'engendreront par construction qu'une seule erreur binaire.

**Question 3.** Donner la séquence de symboles associée à la séquence binaire suivante :  $\underline{b} = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$ .

L'association bits/symboles présentée en Figure 2 est réalisée en groupant les bits de  $\underline{b}$  3 par 3 et en utilisant l'étiquetage de la Figure 2. On obtient donc

$$\underline{b} = \underbrace{[1, 1, 1]}_{s_0=3}, \underbrace{[0, 0, 1]}_{s_1=-5}, \underbrace{[0, 0, 0]}_{s_2=-7}$$

d'où

$$\underline{s} = [3, -5, -7]$$

**Question 4.** Si on souhaite transmettre les **symboles** avec un débit  $R_s = 1M \text{symbole}/s$  quel doit être le **débit binaire** ?

$T_s$  est le temps écoulé entre les transmissions de deux symboles successifs. Par définition, l'association bit/symbole doit avoir réunie  $n_b$  bits pour constituer un symbole. Comme illustré

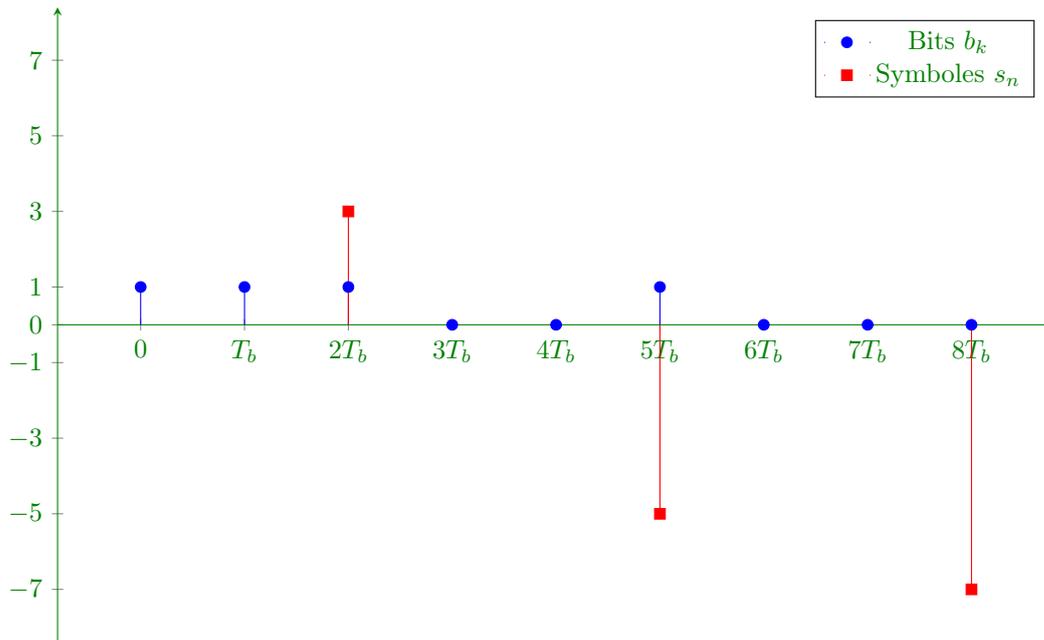


FIGURE 3 – Lien entre  $T_s$  et  $T_b$ .

en Figure 3 on aura alors  $T_s = n_b T_b$ . Or  $T_b = D_b^{-1}$  et  $T_s = D_s^{-1}$ , on en déduit  $D_b = n_b D_s$  soit dans notre cas  $D_b = 3 \text{Mbits/s}$ .

**Question 5.** On étudie maintenant le **décodeur en ligne**. Dessiner les **régions de décisions** associées à chaque symbole.

**Question 6.** Si on reçoit la séquence suivante  $\underline{r}_l = [3.8, -1.1, -7.4]$ , quel seront alors les séquences de symboles et de bits décidées.

## 2 Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs couramment réalisés pour le calcul de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un signal modulé en ligne.

Soit  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  la séquence des symboles délivrée par le codeur en ligne. Les symboles forment un processus à temps discret stationnaire de moyenne  $m_A = \mathbb{E}(A_k)$  et d'auto-corrélation  $R_A[k] = \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*)$ . Cette séquence étant transmise avec un débit symbole  $R_s = T_s^{-1}$ , le signal à temps

continu, correspondant à cette transmission est

$$s_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT_s) \quad (1)$$

Le signal transmis en bande de base  $s_l(t)$  est alors obtenu en filtrant  $s_s(t)$  par le filtre de mise en forme de réponse impulsionnelle  $g(t)$ . L'expression de  $s_l(t)$  est la suivante :

$$s_l(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_s) \quad (2)$$

Pour cet exercice  $g(t)$  nous supposons que  $g(t)$  est borné et à support borné :

- il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $|g(t)| \leq C$
- il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $g(t) = 0$  pour tout  $t \notin I$ .

**Question 1.** Montrer que  $s_l(t)$  est un processus cyclo-stationnaire de période  $T_s$ .

1.1. Calculer  $m_{s_l}(t) = \mathbb{E}(s_l(t))$

$$\begin{aligned} m_{s_l}(t) &= \mathbb{E}(s_l(t)) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k g(t - kT_s) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(s_k) g(t - kT_s) \\ &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne est assuré en remarquant que la somme ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes non nuls.

1.2. Montrer que la fonction  $t \mapsto m_{s_l}(t)$  est **périodique** de période  $T_s$ .

Pour cela on montre directement que  $m_{s_l}(t + T_s) = m_{s_l}(t)$ .

$$\begin{aligned} m_{s_l}(t + T_s) &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s + T_s) \\ &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s), \text{ c.v. } k \leftarrow k - 1 \\ &= m_{s_l}(t) \end{aligned}$$

**1.3.** Calculer la fonction d'**auto-corrélation**  $R_{s_l}(t, \tau) = \mathbb{E}(s_l(t)s_l^*(t - \tau))$ .

$$\begin{aligned}
R_{s_l}(t, \tau) &= \mathbb{E}(s_l(t)s_l^*(t - \tau)) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_k A_{k'}^* g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s)\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(A_k A_{k'}^*) g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s)
\end{aligned}$$

De la même façon que pour la Question 1.1, l'inversion de l'espérance et des sommes est assuré en observant que les sommes ne comportent qu'un nombre fini de termes. La dernière équation est obtenue en utilisant la définition de  $R_A[k]$ .

**1.4.** Montrer que la fonction  $t \mapsto R_{s_l}(t, \tau)$  est périodique de période  $T_s$ .

Pour cela on montre directement que  $R_{s_l}(t + T_s, \tau) = R_{s_l}(t, \tau)$ .

$$\begin{aligned}
R_{s_l}(t + T_s, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s + T_s) g^*(t + T_s - \tau - k'T_s) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s) \text{ c.v. } k \leftarrow k - 1, k' \leftarrow k' - 1 \\
&= R_{s_l}(t, \tau) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) \text{ c.v. } k \leftarrow k, d \leftarrow k - k'
\end{aligned}$$

**Question 2.** Calculer  $\bar{m}_{s_l} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} m_{s_l}(t) dt$

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{s_l} &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} m_{s_l}(t) dt \\
&= \frac{m_A}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) dt \\
&= \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_s} g(t - kT_s) dt \\
&= \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-kT_s}^{-(k-1)T_s} g(t) dt, \quad t \leftarrow t - kT_s \\
&= \frac{m_A}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt, \text{ relation de Chasles}
\end{aligned}$$

**Question 3.** Calculer la fonction d'auto-corrélation moyennée  $\bar{R}_{s_l}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{s_l}(t, \tau) dt$ .

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{s_l}(\tau) &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{s_l}(t, \tau) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \int_0^{T_s} g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-kT_s}^{-(k-1)T_s} g(t) g^*(t - \tau + dT_s) dt \quad t \leftarrow t - kT_s \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g^*(t - (\tau - dT_s)) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] v(\tau - dT_s)
\end{aligned}$$

où  $v(\tau) = \int_{\mathbb{R}} g(t) g^*(t - \tau) dt$ . On reconnaît dans l'expression de  $v(t)$  la convolution entre  $g(t)$  et  $\check{g}(t) = g^*(-t)$ . Cette remarque nous permet de lier le spectre de  $v(t)$  à celui de  $g(t)$ , en effet en prenant la transformée de Fourier de part et d'autre nous avons

$$\begin{aligned}
V(f) &= \mathcal{F}(v) \\
&= \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(\check{g}) \\
&= G(f)G^*(f) \\
&= |G(f)|^2
\end{aligned}$$

**Question 4.** Démontrer la formule de Bennett en calculant la **Densité Spectrale de Puissance** (DSP) de  $s_l(t)$ .

Afin de démontrer la formule de Bennett, nous partirons de la définition de la DSP comme transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation moyennée

$$\Gamma_{s_l}(f) = \mathcal{F}(\bar{R}_{s_l}(\tau))$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{s_l}(f) &= \mathcal{F}(\bar{R}_{s_l}(\tau)) \\
&= \frac{1}{T_s} \mathcal{F} \left( \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] v(\tau - dT_s) \right) \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \mathcal{F}(v(\tau - dT_s)) \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s} \mathcal{F}(v(\tau)) \\
&= \frac{V(f)}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s} \\
&= \frac{|G(f)|^2}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s}
\end{aligned}$$

Il est ici intéressant d'interpréter la formule de Bennett de la façon suivante : la DSP de  $s_l(t)$  ( $\Gamma_{s_l}(f)$ ) est obtenue comme le produit entre la DSP de  $s_s(t)$  ( $\Gamma_{s_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s}$ ) et le module carré de la fonction de transfert du filtre de mise en forme ( $|G(f)|^2$ ).

De plus, cette relation permet aussi de comprendre pourquoi le filtre  $g$  est appelé "filtre de mise en forme". En effet, dans la plupart des cas  $\Gamma_{s_s}(f) = C$  donc

$$\Gamma_{s_l}(f) \propto |G(f)|^2$$

Choisir  $G(f)$  revient donc à choisir l'allure de la DSP du signal transmis. Une corolaire intéressant est donc :  $g$  détermine la bande passante d'une transmission (ensemble des fréquences sur lesquelles la transmission est effectuée).

**Question 5. Application numérique :** calculer et représenter la DSP du signal  $s_l(t)$  pour les hypothèses suivantes :

- les symboles sont 2-PAM ( $A_k \in \{-1, 1\}$ ) uniformément et identiquement distribués
- Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

Nous allons ici utiliser directement la formule de Bennett. Pour cela, quelques résultats préliminaires sont nécessaires. Nous avons

$$\mathbb{E}(A_k) = 1 * \mathbb{P}(A_k = 1) + -1 * \mathbb{P}(A_k = -1) = 0.5 - 0.5 = 0$$

de plus

$$\begin{aligned}
R_A[k] &= \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}(|A_n|^2), & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{E}(A_n)\mathbb{E}(A_{n-k}^*), & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc dans l'expression de la formule de Bennett, nous avons  $\sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]e^{-j2\pi f d T_s} = 1$ . Dans ce cas l'expression de la DSP devient :

$$\Gamma_{s_i}(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_s}$$

Ce résultat est plus général qu'il n'y paraît, en effet dès que les symboles sont indépendants, identiquement distribués et de moyenne nulle,  $\Gamma_{s_i}(f)$  sera de la forme

$$\Gamma_{s_i}(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T_s}$$

où  $\sigma_A^2 = \mathbb{E}(|A_n|^2)$ .

Il nous reste à calculer  $G(f)$ . Pour cela on remarque que  $g(t) = \Pi_{T_s}(t - T_s/2)$  où  $\Pi_{T_s}$  est la porte centrée autour de  $t = 0$  de largeur  $T_s$ . En passant à la transformée de Fourier à il vient

$$\begin{aligned}
G(f) &= e^{j\pi T_s f} \mathcal{F}(\Pi_{T_s}(t)) \\
&= e^{j\pi T_s f} T_s \frac{\sin(\pi T_s f)}{\pi T_s f} \\
&= e^{j\pi T_s f} T_s \text{sinc}(T_s f)
\end{aligned}$$

Finalement on obtient la relation suivante :

$$\Gamma_{s_i}(f) = T_s \text{sinc}^2(T_s f)$$

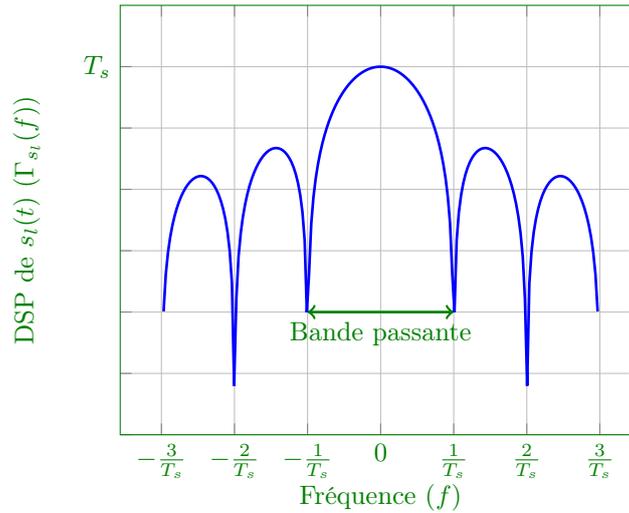
**Question 6.** Application numérique : calculer et représenter la DSP du signal  $s_i(t)$  pour les hypothèses suivantes :

- les symboles sont 2-OOK (On Off Keying) ( $A_k \in \{0, 1\}$ ) uniformément et identiquement distribués
- Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

### 3 Critère de Nyquist et filtrage adapté

Cet exercice a pour but d'illustrer par un exemple le **critère de Nyquist**. Le contexte que nous considérons ici est le suivant :



- le canal de propagation  $h_l(t)$  est supposé à bande passante infinie ( $h_l(t) = \delta(t)$ ),
- le filtre de mise en forme est donné par l'équation suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

**Question 1.** Donner l'expression mathématique du filtre  $g_a(t)$  **adapté** à  $g(t)$ . Que faut-il faire pour rendre ce filtre **causal** ?

Pour rappel, le filtre adapté est le filtre de réception maximisant le rapport signal à bruit aux instants des décisions (juste après l'échantillonneur aux instants  $nT_s$  dans la Figure 1). Son expression mathématique est la suivante :

$$g_a(t) = \lambda g^*(-t)$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .  $\lambda$  est un paramètre qui ne changera pas les performances du récepteur, il peut donc être choisi à convenance. Un premier choix courant est de considérer  $\lambda = 1$ .

Filtre adapté causal :  $g_c(t) = g^*(D - t)$  avec  $D$  un retard tel que  $D \geq T_s$ . Il convient de remarquer que si  $g(t)$  avait un support de durée  $\Delta$ , il faudrait choisir  $D \geq \Delta$ .

**Question 2.** Rappeler le résultat de la convolution  $v(t)$  de  $g(t)$  avec son filtre adapté causal.

On souhaite calculer  $v(t) = (g \star g_c)(t)$ . On part de l'expression intégrale du produit de convolution.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g_c(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g^*(D-t+u)du \\ &= \int_{t-D}^{t-D+T_s} g(u)du \end{aligned}$$

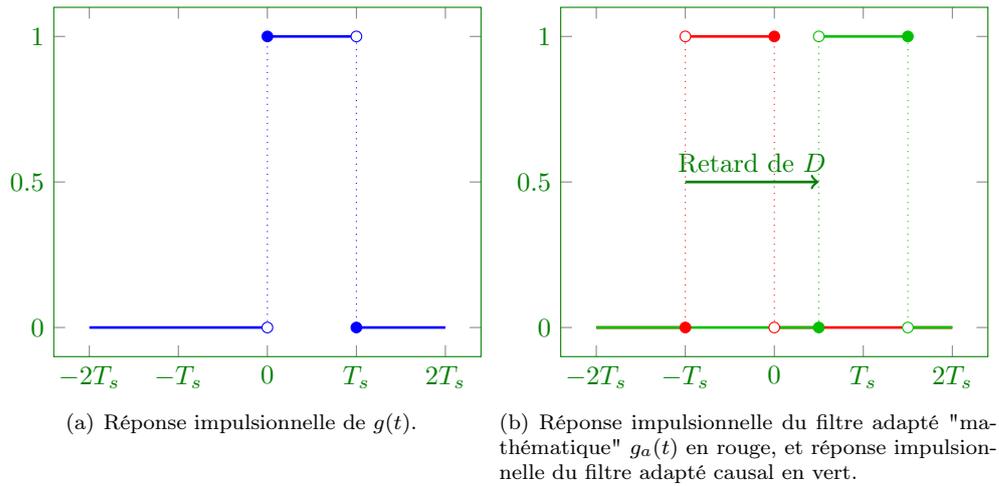


FIGURE 4 – Réponses impulsionnelles du filtre de mise en forme (à gauche), du filtre adapté et du filtre adapté causal (à droite)

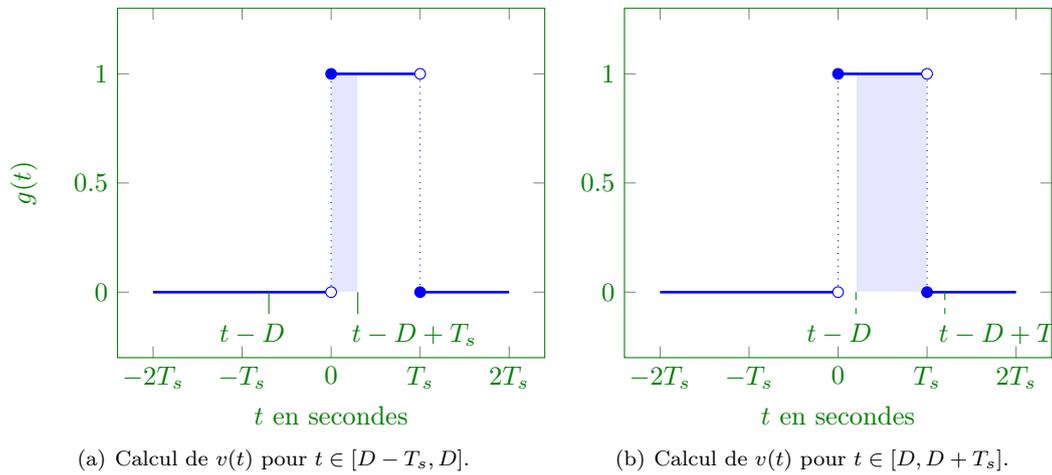


FIGURE 5 – Illustration du calcul de  $v(t)$ .

On obtient finalement l'expression suivante pour  $v(t)$

$$v(t) = \begin{cases} t - D + T_s, & \text{si } t \in [D - T_s, D] \\ -t + D + T_s, & \text{si } t \in [D, D + T_s] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

**Question 3.** Montrer que  $v(t)$  vérifie le **critère de Nyquist**.

**Question 4.** Dessiner le signal transmis  $s_l(t)$ , le signal reçu après filtrage adapté  $r_l(t)$  et le signal numérique  $r_l[n] = r_l(nT_s)$  pour la séquence de symboles trouvée dans la question 3 de l'exercice 1.

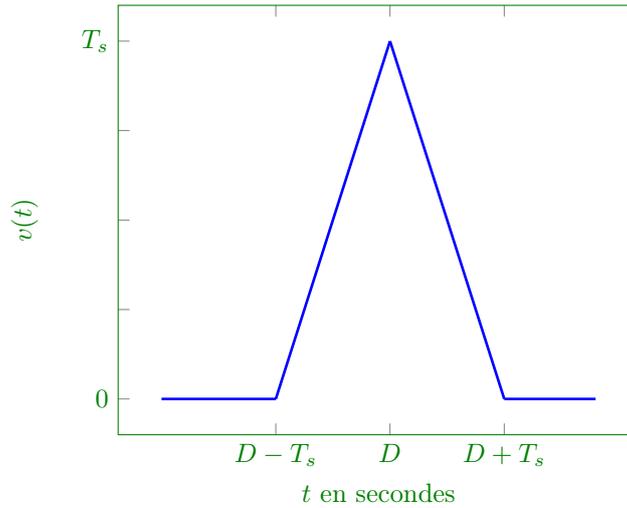


FIGURE 6 – Réponse impulsionnelle du filtre global  $v(t)$ .

**Question 5.** Qu'entraîne la causalité des couples de filtres (mise en forme et adapté) sur la réception du premier symbole à estimer ?

## 4 Probabilité d'erreur et récepteur optimal

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs de la probabilité d'erreur. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Le mapping considéré est le suivant  $Bn = 0 \Rightarrow A_n = -1$  et  $Bn = 1 \Rightarrow A_n = 1$ ,
- Le filtre de réception  $g_a(t)$  est le filtre adapté à  $g(t)$ ,
- Le filtre  $v(t)$  vérifie le critère de Nyquist,
- Le bruit  $n_l(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $\Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2}$ ,
- Le bruit  $n'_l[k]$  en sortie de filtre adapté et échantillonnage au temps  $T_s$  est gaussien moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ ,

**Question 1.** Exprimer  $r_l[n]$ , le  $n^{\text{ième}}$  échantillon de  $r_l(t)$  échantillonné à  $T_s$ , à partir de  $A_n$ , de  $v(t)$  et du bruit.

On repart de l'expression à temps continu :

$$r_l(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k v(t - kT_s)$$

On obtient

$$\begin{aligned} r_l[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k v((n - k)T_s) + n'_l[n] \\ &= A_n v(0) + n'_l[n] \end{aligned}$$

**Question 2.** Démontrer l'expression de la probabilité d'erreur binaire  $P_b$  en fonction de  $\gamma = \frac{g_0^2}{\sigma^2}$  pour une 2-PAM.

Pour calculer  $P_b$  nous allons d'abord utiliser la formule des probabilités totales :

$$P_{b,n} = \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0|B_n = 1)\mathbb{P}(B_n = 1) + \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1|B_n = 0)\mathbb{P}(B_n = 0)$$

Il convient maintenant d'utiliser le principe de la décision. À savoir, la décision  $\hat{B}_n = 1$  est prise si et seulement si  $r_l[n] \geq 0$  (en effet, dans ce cas  $\hat{A}_n = 1$  est décidé, ce qui revient à  $\hat{B}_n = 1$ ).

On obtient donc

$$\begin{aligned} P_{b,n} &= \mathbb{P}(r_l[n] < 0|B_n = 1)\mathbb{P}(B_n = 1) + \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0|B_n = 0)\mathbb{P}(B_n = 0) \\ &= 0.5 \mathbb{P}(r_l[n] < 0|B_n = 1) + 0.5 \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0|B_n = 0) \end{aligned}$$

Or,  $\mathbb{P}(r_l[n] < 0|B_n = 1) = \mathbb{P}(r_l[n] < 0|A_n = 1)$  on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_l[n] < 0|A_n = 1) &= \int_{-\infty}^0 p_{R_n|A_n}(r|1)dr \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r+v(0))^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \int_{v(0)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

De même,  $\mathbb{P}(r_l[n] \geq 0|B_n = 0) = \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0|A_n = -1)$  on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0|A_n = -1) &= \int_0^{+\infty} p_{R_n|A_n}(r|-1)dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r+v(0))^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \int_{v(0)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

On remarque que l'expression obtenue ne dépend pas de  $n$  d'où finalement

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right)$$

**Question 3.** Calculer la fonction d'autocorrélation du bruit AWGN  $n'_l(t)$  (avant échantillonnage).

Le bruit en sortie de filtre adapté a pour expression :

$$n'_l(t) = \int_{\mathbb{R}} n_l(u)g_a(t-u)du$$

Afin de calculer son autocorrélation, nous allons calculer sa DSP.

$$\Gamma_{n'_l}(f) = |G_a(f)|^2 \Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2} |G_a(f)|^2$$

ce qui donne la fonction d'autocorrélation suivante

$$\begin{aligned} R_{n'_l}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left( \Gamma_{n'_l}(f) \right) \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1} (|G_a(f)|^2) \\ &= \frac{N_0}{2} R_{g_a}(\tau) \end{aligned}$$

où  $R_{g_a}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(u) g_a^*(u - \tau) du$ . Il convient de remarquer que comme  $g_a(t) = g^*(-t)$  nous avons  $R_{g_a}(\tau) = v(\tau)$ .

**Question 4.** Faire le même calcul à partir des échantillons discrets :

$n'_l(kT_s)$  du bruit filtré puis échantillonné au rythme  $T_s$ . Le résultat est-il en accord avec les hypothèses de début d'énoncé ?

Pour les échantillons discrets,  $n'_l[k] = n'_l(kT_s)$  nous allons calculer la fonction d'autocorrélation suivante :

$$\begin{aligned} R_{n'_l}[k, n] &= \mathbb{E} (n'_l[n] n'_l^*[n - k]) \\ &= \mathbb{E} (n'_l(nT_s) n'_l^*((n - k)T_s)) \\ &= R_{n'_l}(kT_s) \\ &= \frac{N_0}{2} v(kT_s) \\ &= \frac{N_0}{2} v(0) \delta_k \end{aligned}$$

On observe ici que le bruit en sortie de filtre adapté (demi-Nyquist) et d'échantillonneur est stationnaire, décorrélé et de variance  $\frac{N_0}{2} v(0)$ . Les hypothèses de début d'énoncé sont bonnes si on considère

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} v(0)$$

Pour être complet, il faudrait aussi montrer que le bruit  $n'_l[k]$  est un bruit gaussien centré. La première propriété vient du fait que  $n_l(t)$  est un bruit gaussien donc  $n'_l(t)$  l'est aussi et par conséquent  $n'_l[k]$  est bien gaussien. Pour la moyenne nulle, on remarque que  $\mathbb{E}(n'_l[k]) = \mathbb{E}(n'_l(kT_s)) = 0$  car  $n_l(t)$  est centré par hypothèse.

**Question 5.** Déduire des questions précédentes l'expression de la probabilité d'erreur binaire  $P_b$  en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  pour une 2-PAM, dans le cadre d'un récepteur optimal.

Par définition on a  $E_b = PT_b$  où  $P$  est la puissance de  $s_l(t)$  et  $T_b$  est le temps bit. La puissance  $P$  est obtenue en intégrant la DSP de  $s_l$  calculée dans l'exercice précédent :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{s_l}(f) df = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) df = \frac{v(0)}{T_s}$$

En exprimant  $N_0$  à l'aide de la question précédente, on obtient alors le rapport signal à bruit par bit d'information suivant

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{v(0)^2 T_b}{T_s 2\sigma^2} = \frac{v(0)^2}{2\sigma^2}$$

où la dernière expression provient du fait que pour une BPSK,  $T_s = T_b$ .

On obtient finalement l'expression de  $P_b$  comme fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  :

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

## 5 Étude pratique

Dans la pratique les signaux à traiter sont discrets. Les écritures précédentes des signaux à temps continu n'ont qu'un intérêt pédagogique et permettent de ne pas alourdir les calculs théoriques. Dans cette partie, vous allez à partir des résultats théoriques précédents faire l'analyse pratique d'une communication numérique en bande de base. Aux hypothèses précédentes, nous rajoutons désormais les suivantes :

⇒ Hypothèses :

- La fréquence d'échantillonnage du CNA est :  $f_e = \frac{1}{T_e} = 8\text{kHz} \Rightarrow$  les versions discrètes  $s_l[n]$  et  $g[n]$  respectivement du signal  $s_l(t)$  et du filtre  $g(t)$  sont donc obtenues par échantillonnage à  $T_e = 1/f_e$ ,
- Les filtres  $g(t)$  et  $g_a(t)$  sont les mêmes que ceux utilisés lors de l'étude théorique,
- Le débit symbole  $D_s = 2\text{kSymboles/s} \Rightarrow T_s = 0.5\text{ms}$ ,
- La séquence de bits à émettre est de durée finie et vaut :  $\underline{b} = [0100100111]$ ,
- On considère que les symboles émis appartiennent à une constellation 4-PAM  $\Rightarrow M = 4$  et  $\forall k A_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$ ,
- Tous les vecteurs considérés seront des vecteurs lignes.

⇒ Questions pratiques :

1. Quelle est la période d'échantillonnage de  $\underline{b}$ ?
2. Quel est le nombre de symbole à émettre?
3. Si on note  $\underline{S}$  le vecteur de symboles à émettre, donner les valeurs de  $\underline{S}$ , en déduire sa dimension,
4. Quelle est la période d'échantillonnage de  $\underline{S}$ ?
5. Quelle est l'expression discrète de  $g[n]$ , en déduire l'expression du vecteur  $\underline{g}$  contenant les échantillons de  $g[n]$ . On notera  $F_{se}$  le nombre d'échantillons de  $\underline{g}$ ,
6. On souhaite que l'énergie des filtres ( $g(t)$  et  $g_a(t)$ ) soit normalisée, quel facteur de normalisation doit être appliqué à  $\underline{g}$ ?
7. Tracer l'allure du signal continu  $s_l(t)$ , en déduire son allure discrète,
8. Calculer et la tracer la convolution de  $\underline{g}$  avec  $\underline{S}$ . Que constatez-vous?
9. Que devez vous faire pour que le résultat soit cohérent avec l'allure attendu de  $s_l[n]$ ?
10. Représenter l'allure de la DSP de  $s_l[n]$ ,
11. Si on définit la largeur de bande de  $s_l[n]$  comme étant égale à la largeur du lobe principal de la DSP, combien vaut-elle?

12. On considère que la variance du bruit AWGN vaut  $\sigma_{n_l}^2 = 1/16$ , tracer dans ce cas la constellation des symboles détectés  $r_l[n]$  dans un intervalle de confiance de  $\pm 3\sigma_{n_l}$  autour de chaque symbole possible (soit 99,7% de confiance).
13. Dans les conditions précédentes de bruit, que pensez-vous de la fiabilité de cette communication numérique ?