

TS226

-

Codes correcteur d'erreur

Romain Tajan

29 septembre 2020

Plan

1 Introduction

2 Code Convolutif

- ▷ Un premier exemple de code convolutif
- ▷ Définition des codes convolutifs
 - Codes convolutifs rékursifs
 - Codes convolutifs systématiques
- ▷ Représentation octale
 - Notation octale des codes non rékursifs
 - Notation octale des codes rékursifs
- ▷ Code convolutif comme machine à états
 - Diagramme d'état des codes convolutifs

Plan

1 Introduction

2 Code Convolutif

- ▷ Un premier exemple de code convolutif
- ▷ Définition des codes convolutifs
- ▷ Représentation octale
- ▷ Code convolutif comme machine à états

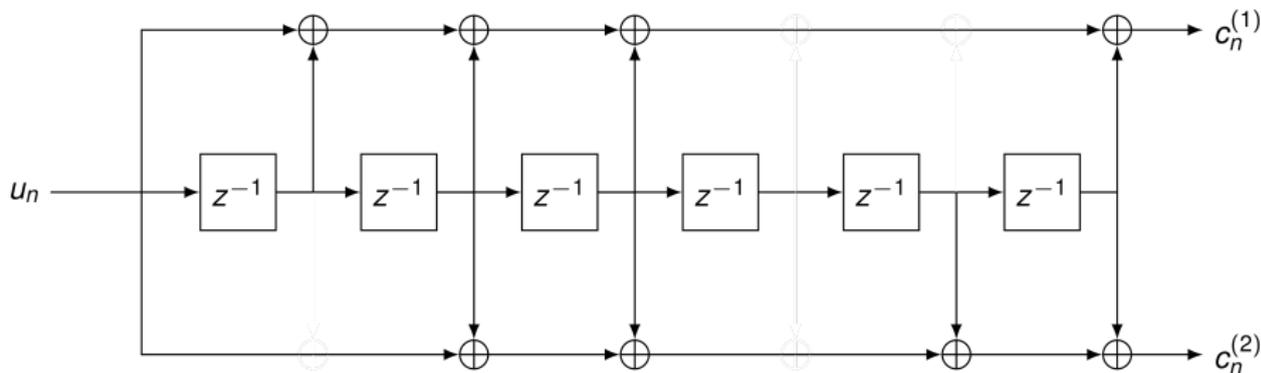
1 Introduction

2 Code Convolutif

- ▷ Un premier exemple de code convolutif
- ▷ Définition des codes convolutifs
- ▷ Représentation octale
- ▷ Code convolutif comme machine à états

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



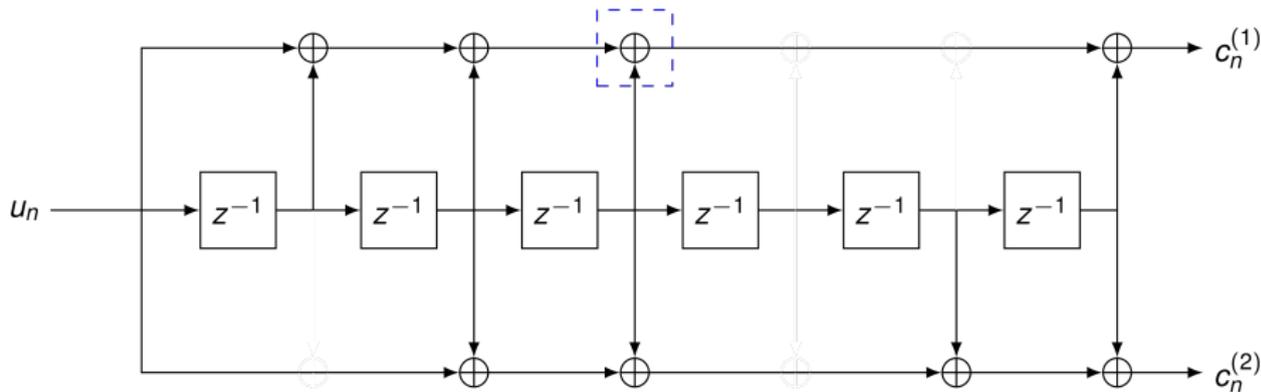
Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

Addition modulo 2 (XOR)

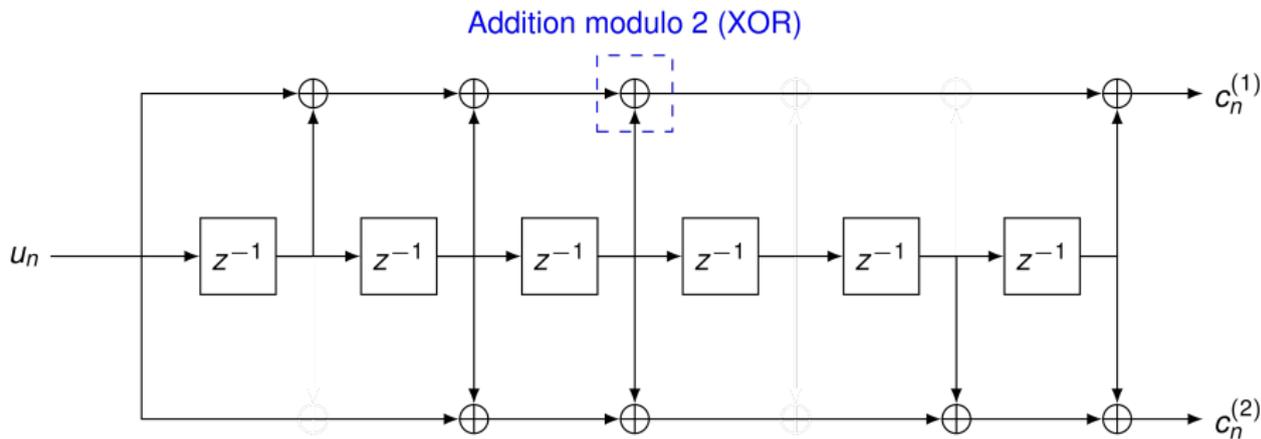


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [\dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

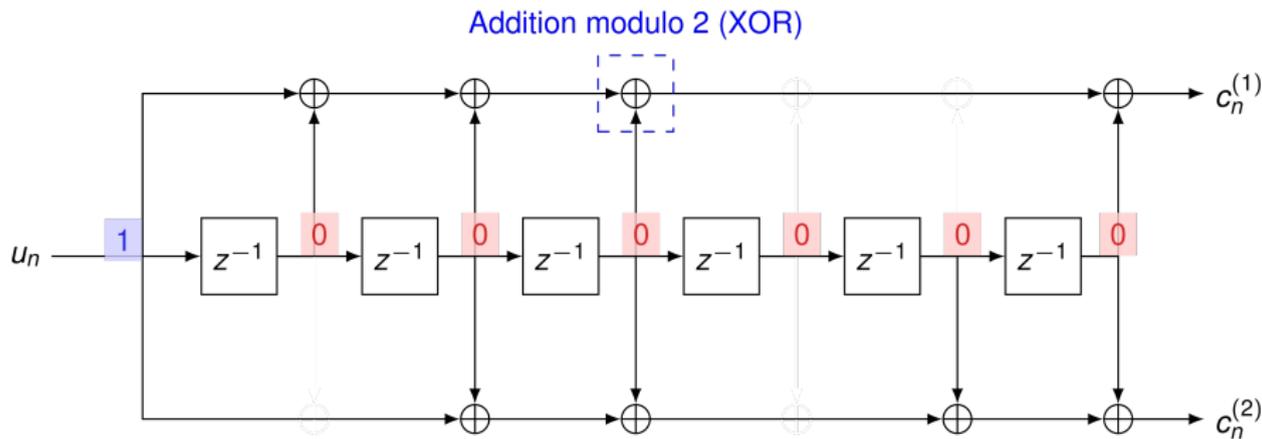


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

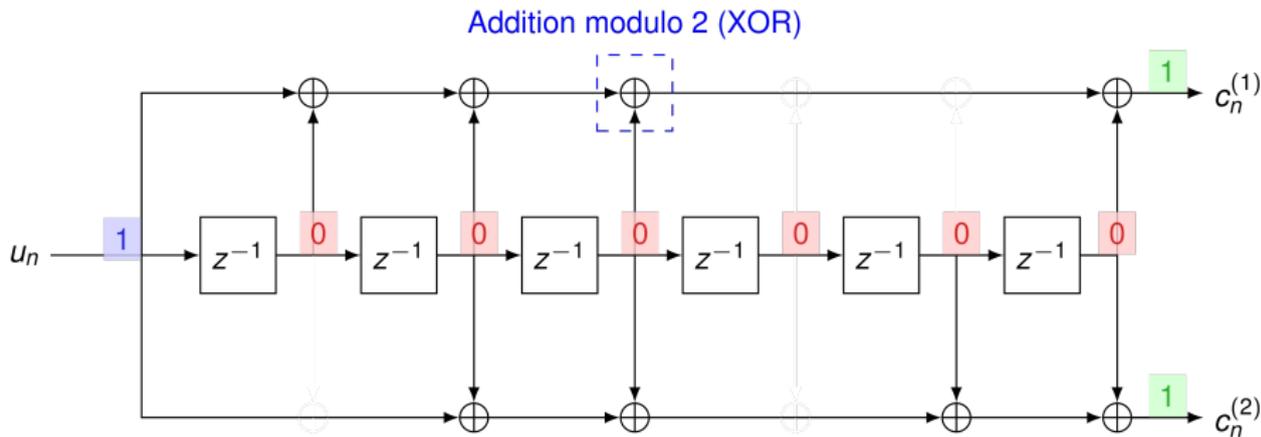


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

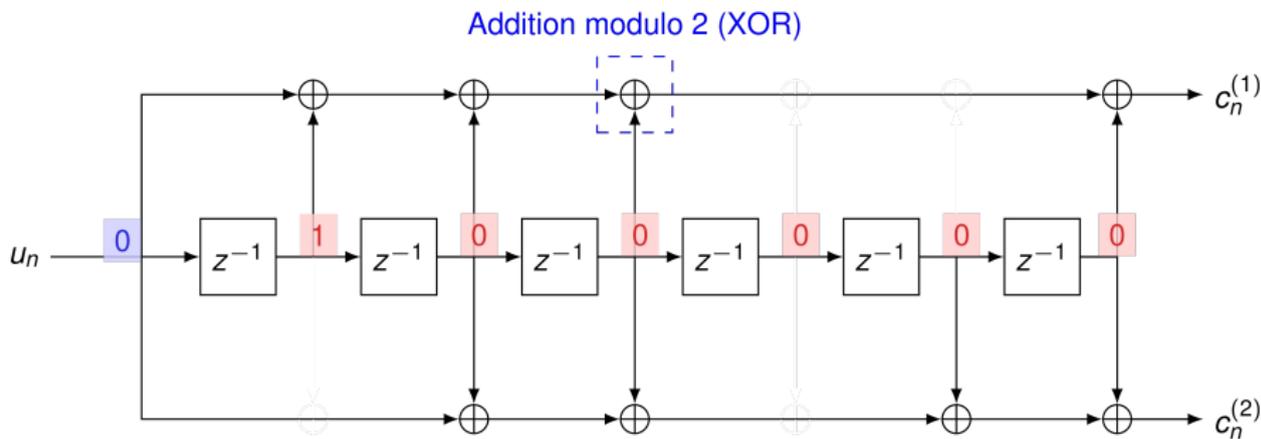


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

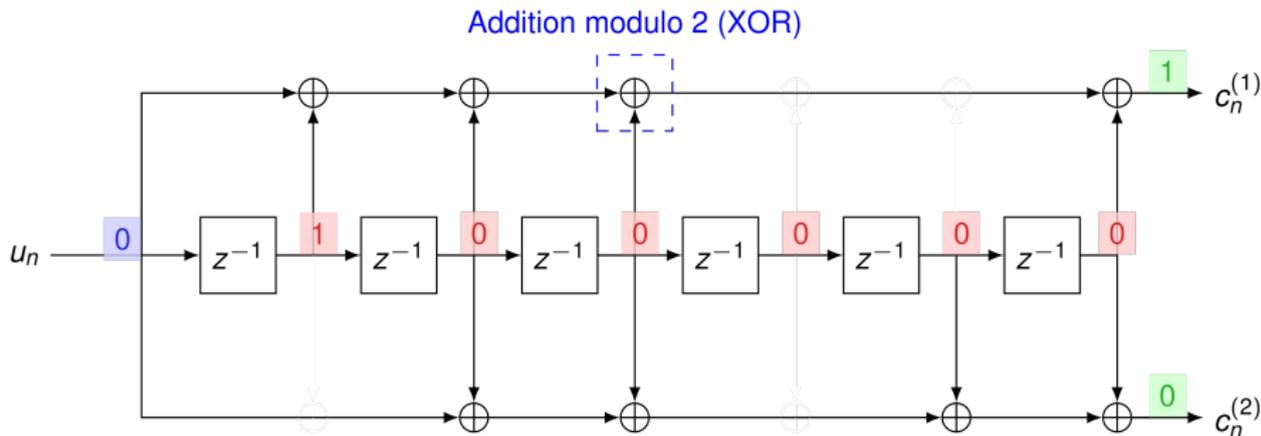


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad c_1^{(1)} \quad c_1^{(2)} \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

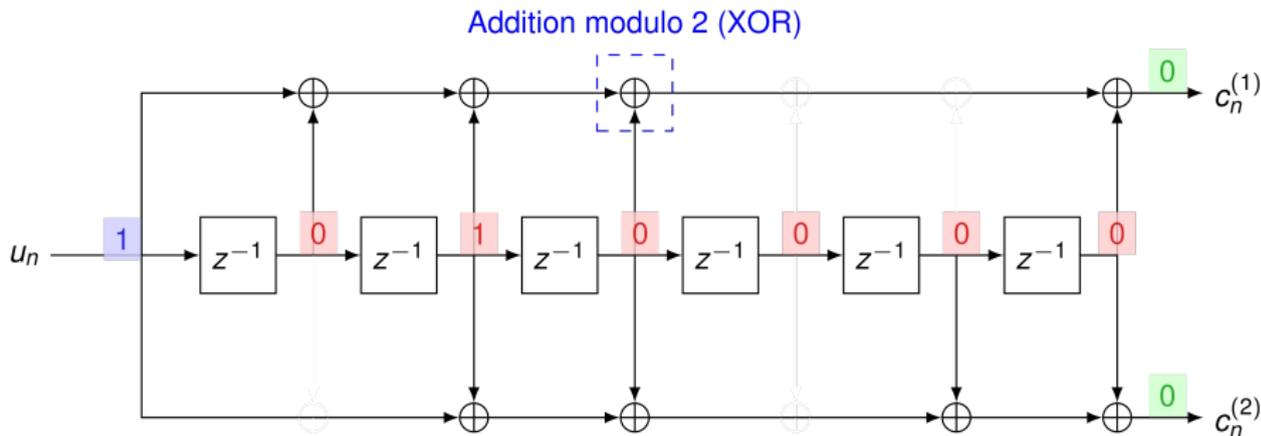


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

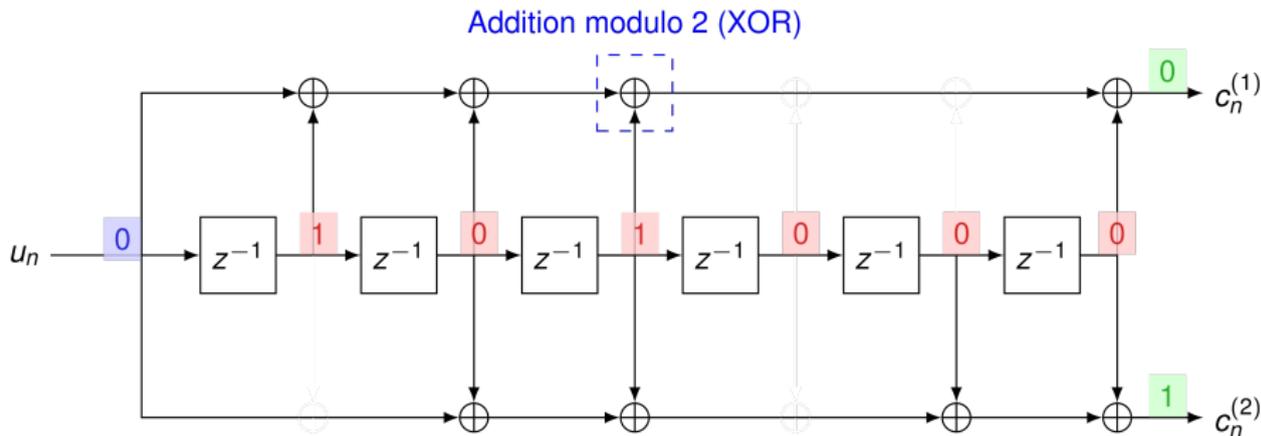


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

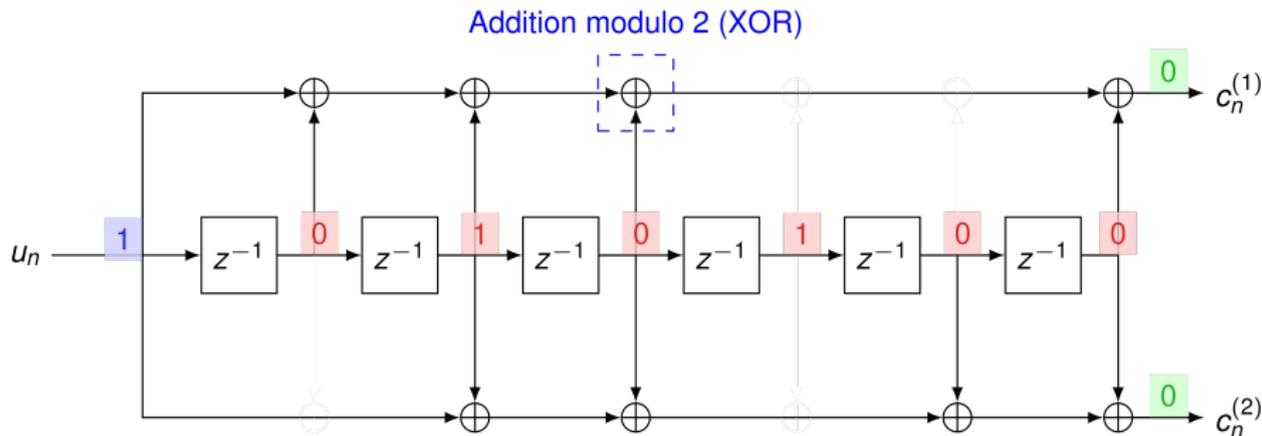


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

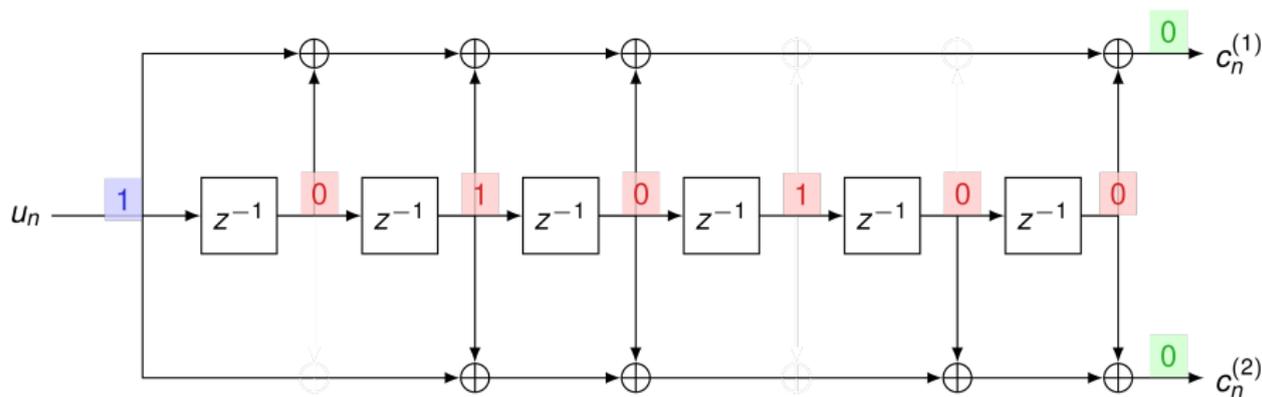


Message : $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots]$

Mot de code : $\mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots]$

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

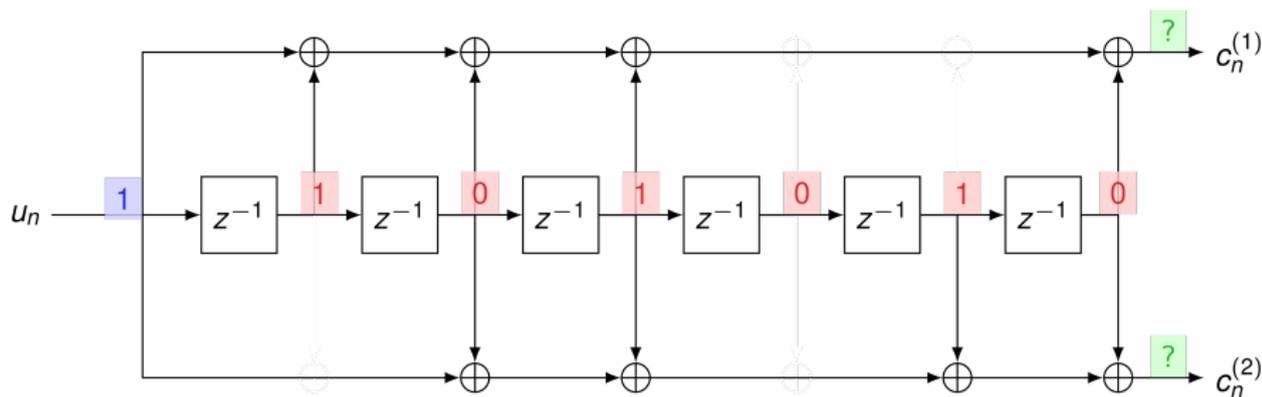


Quel est le prochain état ?

- A [0, 1, 0, 1, 0, 1]
- B [1, 0, 1, 0, 1, 0]
- C [1, 0, 1, 1, 0, 0]
- D Aucune des réponses A, B ou C.

Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

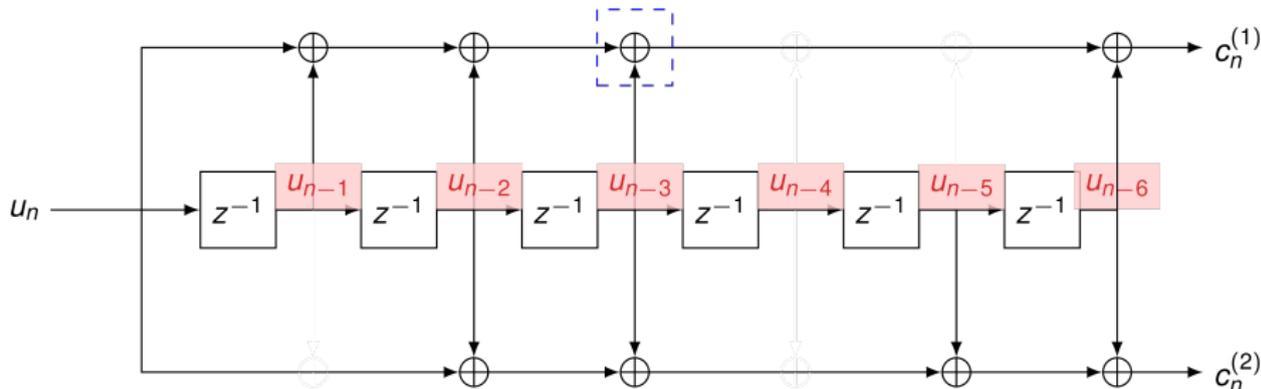


Quel est la sortie ?

- A [0, 1]
- B [1, 0]
- C [0, 0]
- D [1, 1]

Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

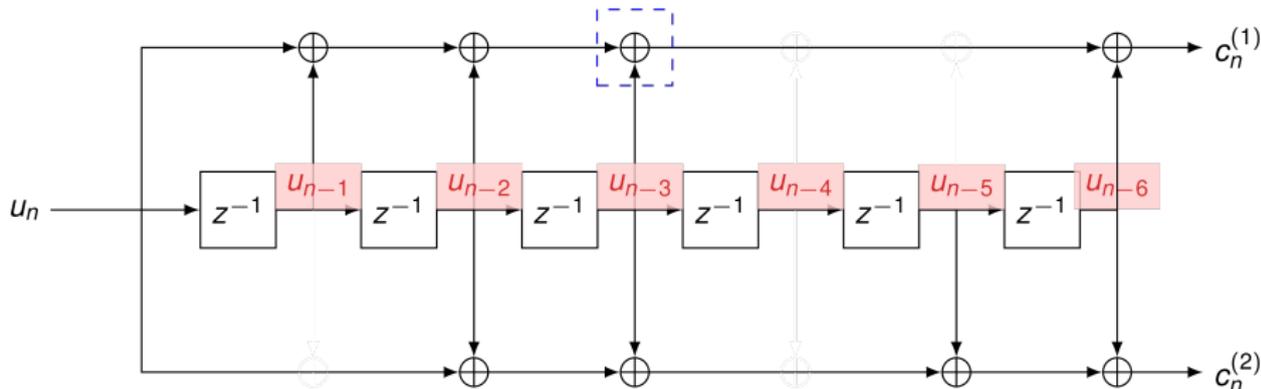
Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

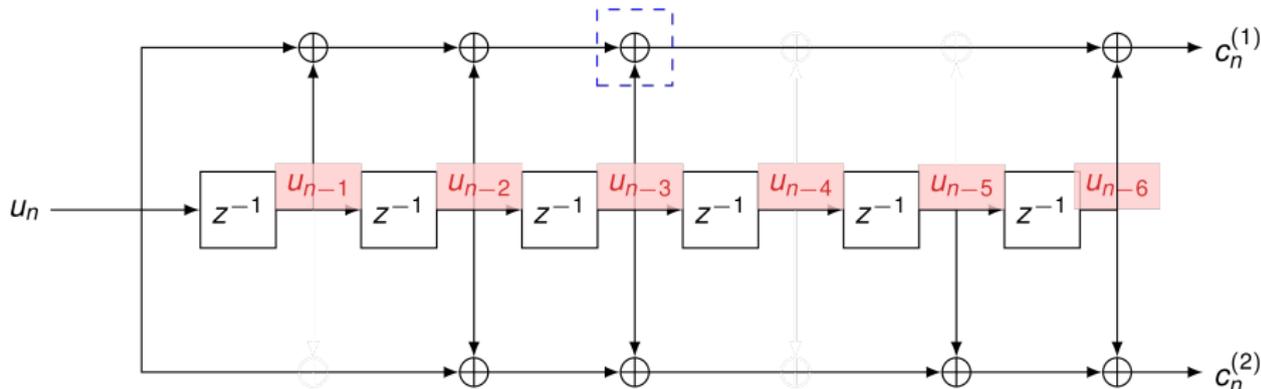
Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

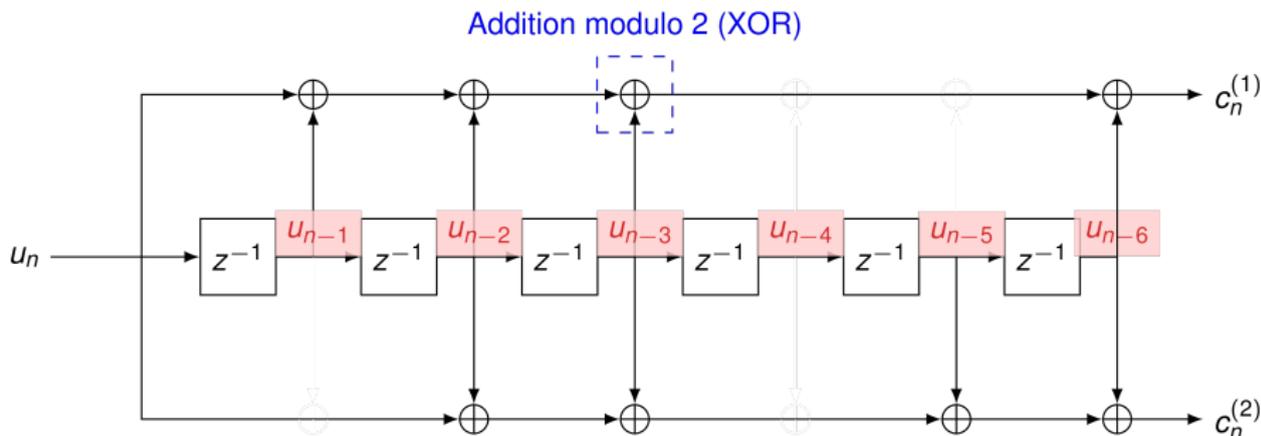
Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

Codes Convolutifs : retour sur l'exemple



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

On remarque : $c_n^{(i)} = \sum_{k=0}^m g_k^{(i)} u_{n-k}$

En utilisant la TZ : $C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)$

Ici : $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$
 $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$

Code Convolutif : définition

Code convolutif

Code Convolutif (CC) : code tel que ses **mots de codes** sont obtenu par **filtrages numériques linéaires** à valeurs dans $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ des messages binaires.

Message : $U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k}$ [transformée en Z de la séquence message $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$]

Mot de code : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z), C^{(1)}(z), \dots, C^{(n_s-1)}(z)]$ [$C^{(i)}(z)$ sortie du filtre i]

$$C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)$$

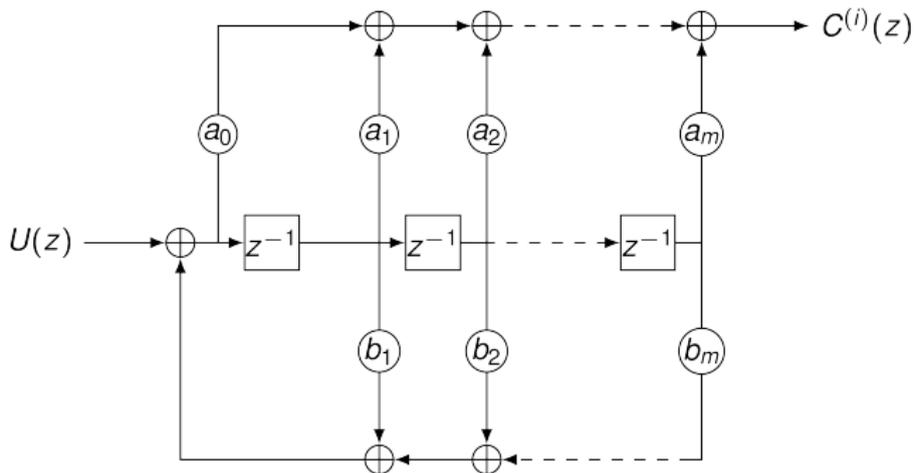
La définition générale de $G^{(i)}(z)$ est la suivante :

$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + \dots + a_m^{(i)}z^{-m}}{1 + b_1^{(i)}z^{-1} + \dots + b_m^{(i)}z^{-m}}$$

Encodeur récursif / Non récursif

Un encodeur est dit **récursif** s'il existe une boucle de rétroaction de sa sortie sur son entrée (s'il existe i tel que $B^{(i)}(z) \neq 1$).

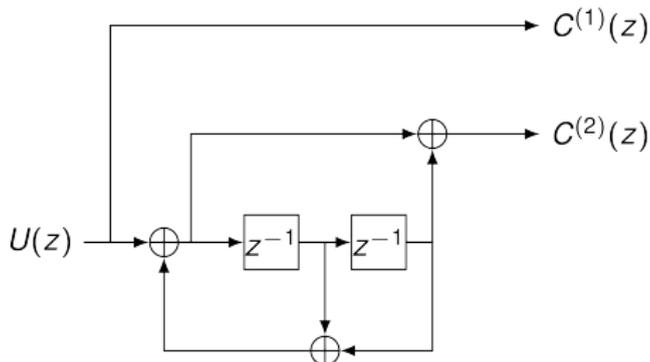
$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z^{-1} + \dots + a_m^{(i)} z^{-m}}{1 + b_1^{(i)} z^{-1} + \dots + b_m^{(i)} z^{-m}}$$



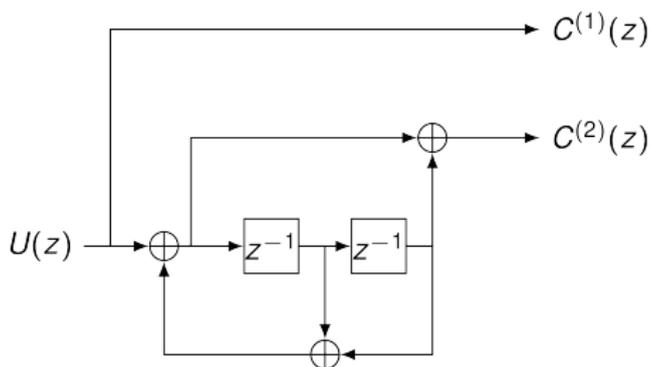
Encodeur systématique / Non systématique

Un encodeur est dit **systématique** s'il existe une sortie i telle que $C^{(i)}(z) = U(z)$.

\Leftrightarrow S'il existe une sortie i telle que $G^{(i)}(z) = 1$.



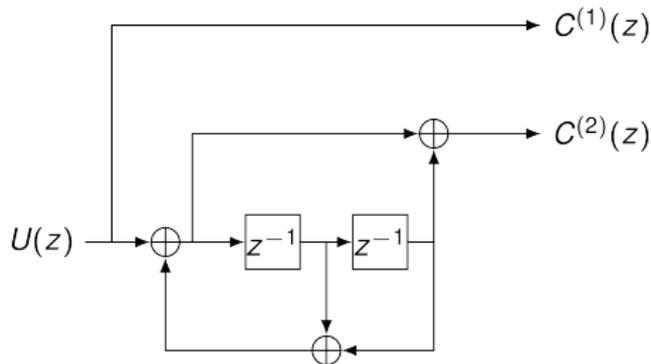
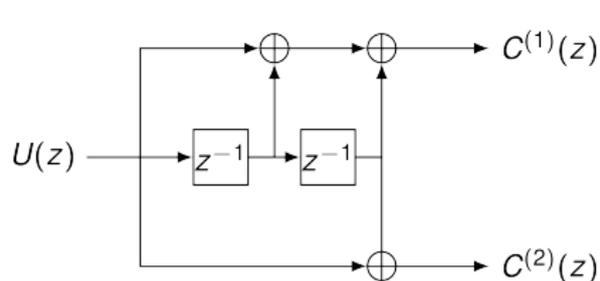
Quiz Encodeur Récurif, Encodeur Systématique



Cet encodeur est :

- A Récurif et systématique,
- B Récurif et non systématique,
- C Non Récurif et systématique,
- D Non Récurif et non systématique,

Quizz Encodeur Récursif, Encodeur Systématique

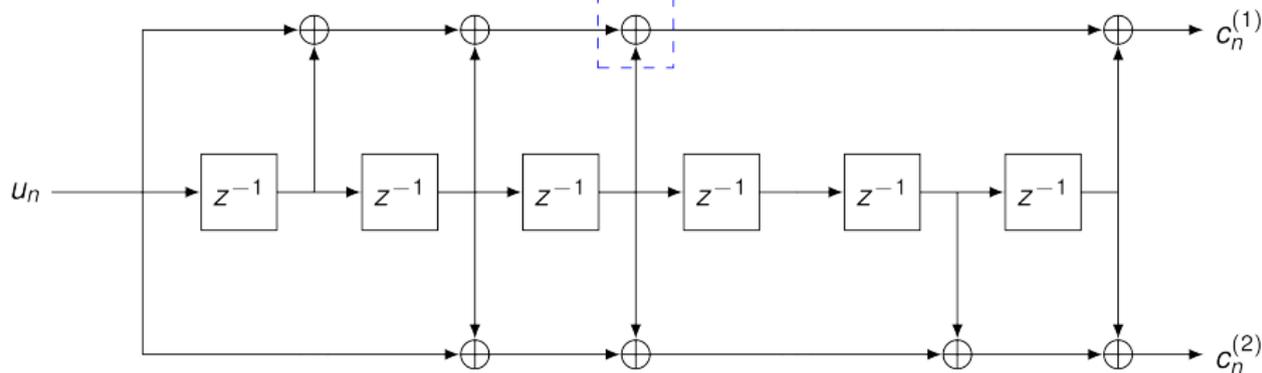


Ces deux encodeurs produisent le même code ?

- A Vrai
- B Faux

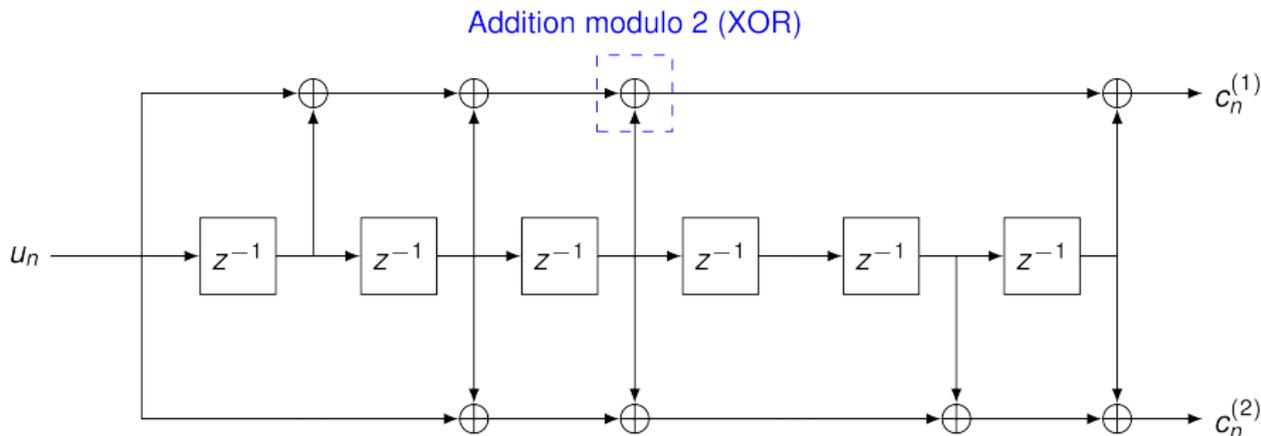
Notation octale des codes convolutifs

Addition modulo 2 (XOR)



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

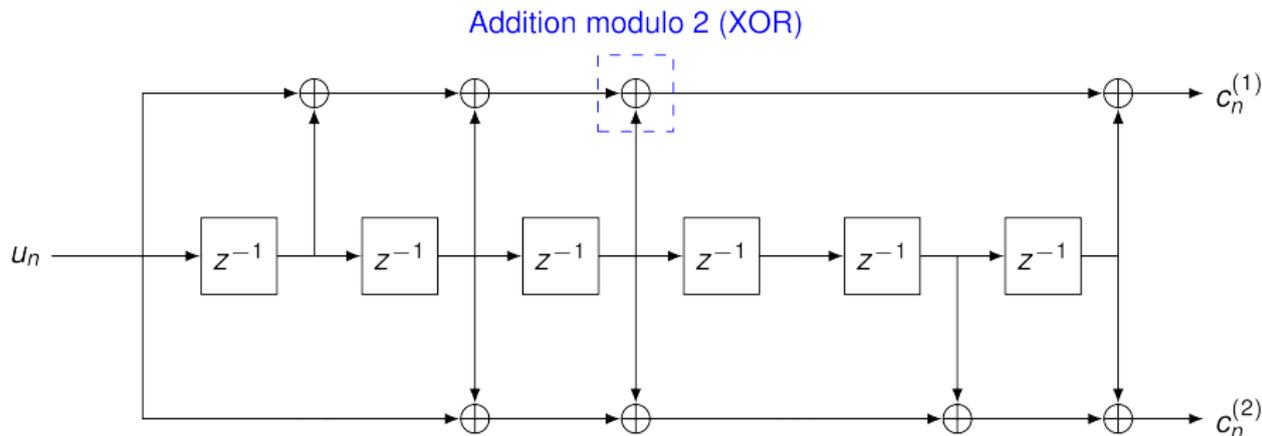
Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓
1

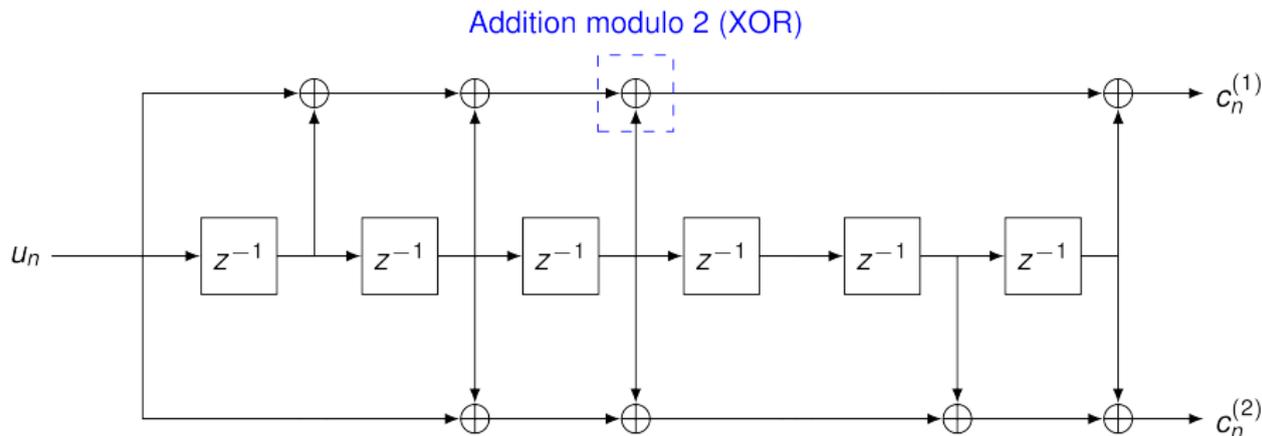
Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{1}]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{1}]$

↓ ↓
7 1

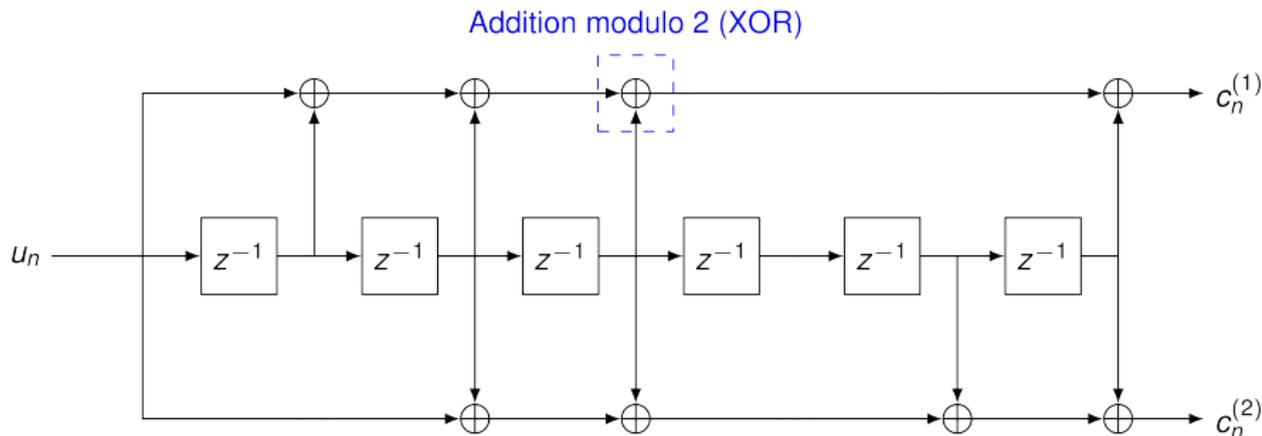
Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓ ↓ ↓
1 7 1

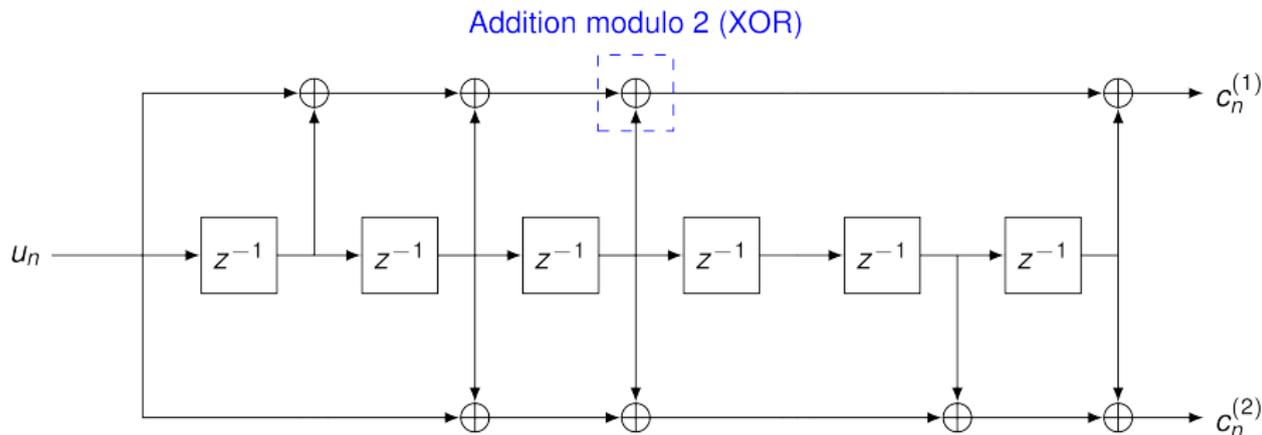
Notation octale des codes convolutifs



Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
1 7 1 1 3 3

Notation octale des codes convolutifs

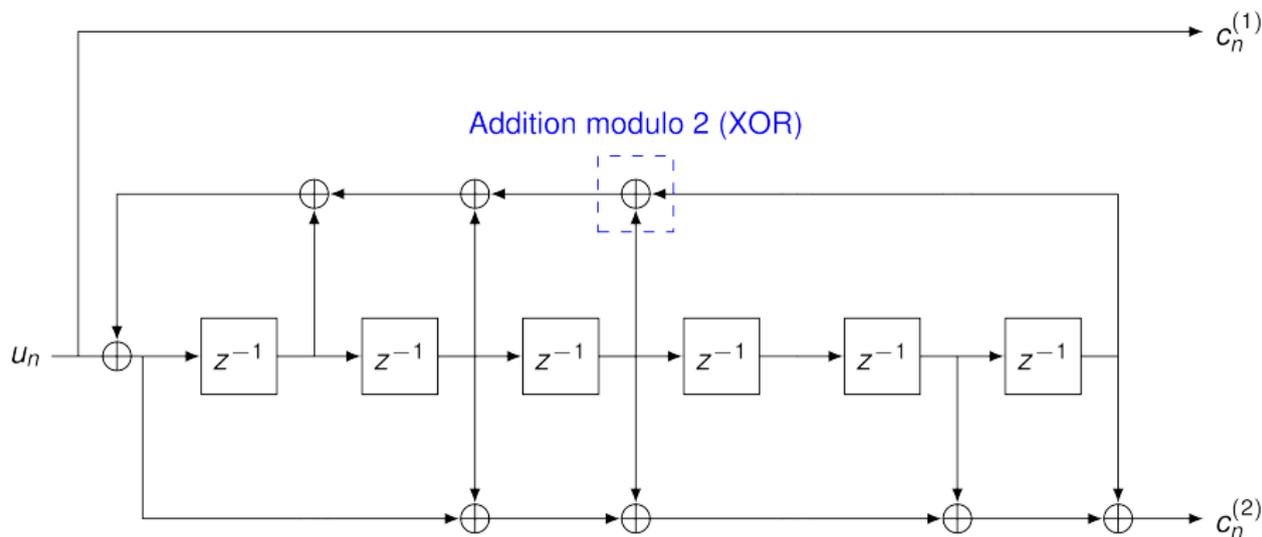


Exemple : $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
1 7 1 1 3 3

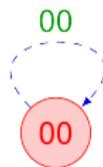
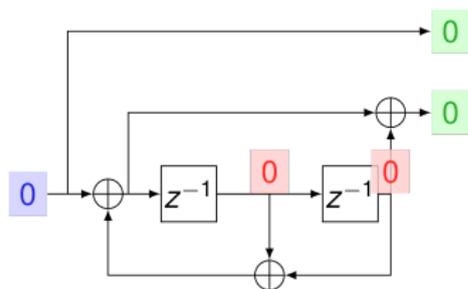
Ce encodeur est noté $(171, 133)_8$

Notation octale des codes convolutifs récursifs



Cet encodeur sera noté $(1, \frac{133}{171})_8$.

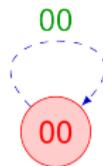
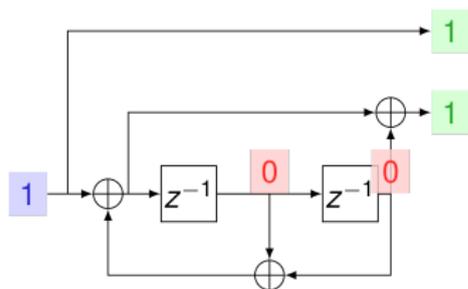
Diagramme d'état d'un code convolutif



$$c_n \rightarrow u_n = 0$$

$$c_n \rightarrow u_n = 1$$

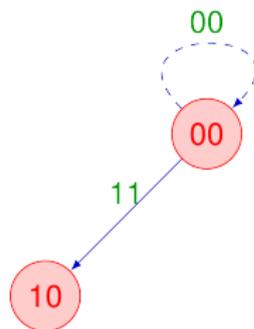
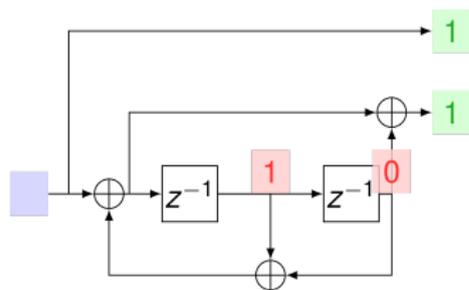
Diagramme d'état d'un code convolutif



$$c_n \rightarrow u_n = 0$$

$$c_n \rightarrow u_n = 1$$

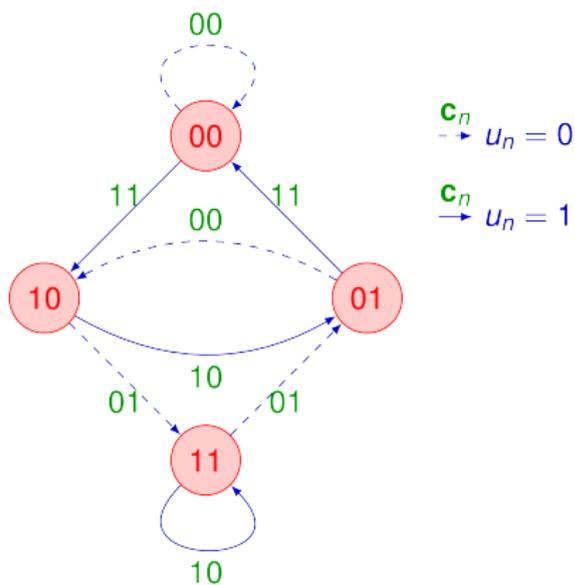
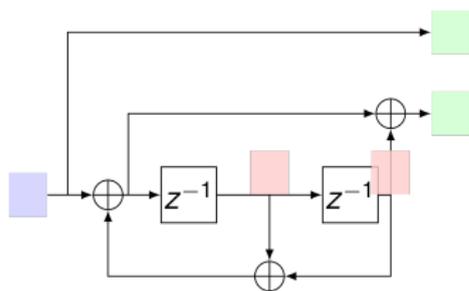
Diagramme d'état d'un code convolutif



c_n
 $\rightarrow u_n = 0$

c_n
 $\rightarrow u_n = 1$

Diagramme d'état d'un code convolutif



Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- A Très difficile
- B Difficile
- C Moyen
- D Simple
- E Très simple