TS226 - Théorie de l'information
année 2020/2021

Romain Tajan

1 Canal à effacements binaires

On s'intéresse, dans cet exercice au canal à effacement binaire donné en Figure 1.

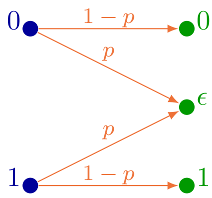

FIGURE 1 – Canal à effacements binaires

Question 1. Montrer que la capacité de ce canal est $C(p) = 1 - p$.

Question 2. Pour chaque valeur de p, donner la distribution d'entrée permettant d'atteindre $C(p)$.

Question 3. Pour quelle(s) valeurs de p a-t'on $C(p) = 0$?

2 Canal en Z

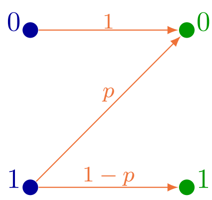

FIGURE 2 – Canal en Z

Considérons le canal à entrées/sorties binaires, dont les probabilités de transitions sont données dans la figure 2. Ce modèle de canal, dit canal en Z, est très utilisé dans le contexte des communications optiques.

Question 1. Donner l'expression de la capacité du canal en Z en fonction de p.

Question 2. Donner la distribution d'entrée atteignant la capacité pour $p = 1/2$. Ce résultat est-il intuitif, au vu de la structure du canal ?

3 Canal symétrique

Soit un canal $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, p(y|x))$ tel que $\mathcal{X} = \{x_0, \dots x_{N_x-1}\}$ et $\mathcal{Y} = \left\{y_0, \dots y_{N_y-1}\right\}$. La matrice de transition T de ce canal est la matrice de taille $N_x \times N_y$ ayant pour terme général $T_{i,j} = p(y_j|x_i)$. Un canal est dit symétrique si ça matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :

1. Chaque ligne est obtenue comme une permutation des autres lignes.
2. Si toutes les sommes des colonnes sont égales.

Question 1. Montrer que pour un canal symétrique, la capacité majorée par

$$C \leq \log(N_y) - h(\mathbf{r})$$

où $\mathbf{t} = [t_0, t_1, \dots]$ est une ligne de la matrice de transition et $h(\mathbf{r})$

Question 2. Montrer que pour un canal symétrique, la capacité est

$$C = \log(N_y) - h(\mathbf{r})$$

pour une entrée uniforme.

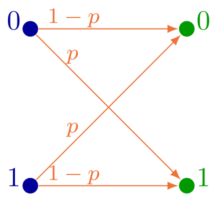

Figure 3 – Canal à binaire symétrique

Question 3. Le canal binaire symétrique donné en figure 3 est-il symétrique ?

Question 4. Montrer que le canal binaire symétrique donné en figure 3 est symétrique.

Question 5. En déduire la capacité du canal binaire symétrique.

Question 6. Le canal en Z donné en figure 2 est-il symétrique ?

Question 7. Le canal BEC donné en figure 1 est-il symétrique ?

4 Canaux AWGN parallèles

On considère un cas général de canaux parallèle composé de K canaux gaussiens indépendants donnés dans la Figure 4 :

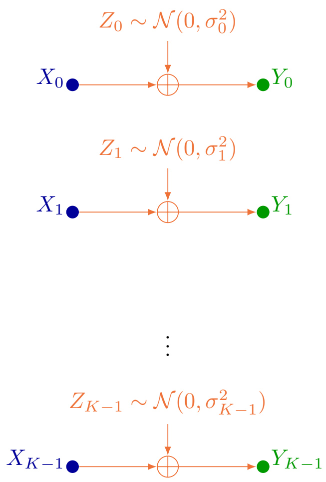

FIGURE 4 – Canaux gaussiens parallèles

où Z_0, . . . , Z_{K-1} sont indépendants et $Z_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sigma_k^2)$. En considérant l'entrée comme le vecteur $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_{K-1})$ à composantes décorrélées, et la sortie comme $\mathbf{Y} = (Y_0, \ldots, Y_{K-1})$, la capacité d'un tel canal, pour des puissances d'entrées fixées $P_0, \ldots, P_{K-1}$, est donnée par

$$C = \sup_{p(\mathbf{x}):\mathbb{V}(X_k) \leq P_k^2} \mathbb{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

où le supremum est pris sur toutes les densités de probabilité sur $\mathbb{R}^K$ telles que $\mathbb{V}(X_k) = P_k$ pour $k = 0, \ldots K-1$. Calculer explicitement cette capacité, en précisant une distribution d'entrée qui permet de l'atteindre.