TS226 - TD Code convolutifs
année 2019/2020

Romain Tajan

Exercice 1 Décodage du Maximum de vraisemblance

Dans cet exercice, nous allons considérer le code convolutif généré par les transformées en Z suivantes :

$$g_1(z) = 1, \qquad g_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

Question 1. Donner la représentation octale de ce code, ainsi que son encodeur récursif systématique.

Question 2. Quelle est la mémoire de ce code ?

Question 3. Quelle est le rendement de ce code ?

Question 4. Combien d'états sont nécessaires pour représenter le treillis de ce code.

Question 5. Dessiner le treillis complet sur 4 sections incluant ouverture et fermeture.

Nous allons maintenant comparer le résultat de l'algorithme de Viterbi à celui du décodage du maximum de vraisemblance exhaustif. On considèrera les propriétés suivantes :

— Le message transmis est $\mathbf{u} = [1,\ 0,\ 1]$.

— Le signal observé est le $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1]$.

Question 6. Énumérer l'ensemble des mots de codes obtenus par encodage de messages de longueur 3 le treillis sera fermé.

Question 7. Calculer, pour chaque mot de code $\mathbf{c}$ calculé à la question précédente, la distance entre le signal transmis $\mathbf{x} = 1 - 2\mathbf{c}$ et le signal observé $\mathbf{y}$. *On parle ici de la distance* $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2$. En déduire le mot de code minimisant la distance à l'observation.

Question 8. On considère le même signal reçu $\mathbf{y}$, utiliser l'algorithme de Viterbi pour décoder. Le résultat de ce décodage est-il identique à celui du maximum de vraisemblance.

Question 9. Combien de mot de codes ont été explorés par l'algorithme de Virterbi ?

Exercice 2 Pour aller plus loin...

Question 1. Montrer que le code (l'ensemble des mots de codes) généré par les polynômes $(1, \frac{1+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}})$ est identique au code généré par les polynômes $(1+z^{-1}+z^{-2}, 1+z^{-2})$.

Question 2. Montrer que le décodeur du maximum à posteriori minimise la probabilité d'erreur trame.

Question 3. Montrer que le maximum de vraisemblance revient à minimiser $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_2^2$ où les signaux transmis $\mathbf{x} = 1 - 2\mathbf{c}$ correspondent à la modulation BPSK des mots de codes $\mathbf{c}$.

Question 4. Montrer que la performance du décodage ML n'est pas affectée par le choix de l'encodeur (récursif ou non).

Question 5. Montrer que la probabilité d'erreur trame d'un code linéaire peut s'écrire avec la formule suivante :

$$P_e = \sum_{w=d_{min}}^{+\infty} A_w Q\left(\sqrt{2wR\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{1}$$

où A_w représente le nombre de mots de codes de poids w.

Question 6. Pour le code de la Question 1, calculer le poids minimal d_{min} d'un mot de code de longueur n. Combien de mots de codes ont ce poids là ?

Question 7. Même question pour le code de l'exercice 2. Quel code sera le plus performant pour de grandes valeurs de $\frac{E_b}{N_0}$?