II] Synchronisation fréquentielle

Pour rappel, le signal reçu avant démodulation est donné par

$$\tilde{r}(t) = \mathrm{Re}\left(r(t)\, e^{i2\pi f_c t} \right)$$

où $r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k\, q(t - kT_s) + v(t)$.

En présence d'une dérive en fréquence δf, le signal après démodulation se modélise plutôt comme

$$r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k\, q(t - kT_s)\, e^{i2\pi \delta f t} + v(t)\, e^{i2\pi \delta f t}$$

et $f_c = 1\ \mathrm{GHz}$

↳ dérive des oscillateurs locaux : précision de 10^{-4} par rapport à la fréquence nominale

$$\text{dérive} \simeq 10^{9} \times 10^{-4} = 100\ \mathrm{kHz}$$

↳ Effet Doppler : vitesse $\simeq 50$ km/h

$$\text{dérive} \simeq f_c\, v/c = \frac{10^9 \times 50.10^3}{3.10^8 \times 3.6 \times 10^3} \simeq 50\,\mathrm{Hz}$$

→ négligeable comparé à la dérive des oscillateurs.

En OFDM, la dérive en fréquence peut être catastrophique car elle détruit l'orthogonalité entre sous-porteuses.

En particulier, si rien n'est fait pour compenser la dérive,

$$r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \, e^{i2\pi \delta f \, kT_s} \, g(t-kT_s) \, e^{i2\pi \delta f (t-kT_s)} + v(t) \, e^{i2\pi \delta f t}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k' \, g'(t-kT_s) + v'(t)$$

On aura un modèle convolutif bruité, avec une rotation de la constellation $((s_k'))$ qui évolue au cours du temps.

Après échantillonnage à T_s ou $T_s/2$, on se ramène au modèle

$$r_n = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \, s_{n-k} \, e^{i2\pi \nu n} + v_n$$

où
- $\nu \in [0,1]$
- (g_k) est supposé de longueur K
- (v_n) b.b. gaussien complexe circulaire de variance σ^2.

Objectif. Estimer ϑ à partir de $r_0, \dots r_{N-1}$

sachant que (q_k) n'est pas connu

$\Rightarrow$ estimation conjointe.

1) Exemple simple : estimation d'une sinusoïde non modulée.

$\rightarrow$ modèle $\qquad r_n = \alpha e^{i2\pi\vartheta n} + v_n$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$ une amplitude inconnue.

$\rightarrow$ estimateur MV $\qquad \underline{r} = (r_0, \dots, r_{N-1})^T$

$$f(\underline{r} ; \alpha, \vartheta, \sigma^2) =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma^2 \pi}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left| r_n - \alpha e^{i2\pi\vartheta n} \right|^2\right]$$

$$(\hat{\alpha}_N, \hat{\vartheta}_N) = \underset{\alpha, \vartheta}{\operatorname{argmax}} \; f(\underline{r} ; \alpha, \vartheta, \sigma^2)$$

$$= \underset{\alpha, \vartheta}{\operatorname{argmin}} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \left| r_n - \alpha e^{i2\pi\vartheta n} \right|^2}_{J(\alpha, \vartheta)}$$

On va effectuer une minimisation en deux temps de la fonction de coût J :

$$\min_{\alpha,\nu} J(\alpha,\nu) = \min_{\nu} \min_{\alpha} J(\alpha,\nu)$$

et on posera

$$\hat{\alpha}_N(\nu) = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}}\, J(\alpha,\nu) \quad \nu \text{ fixé}$$

$$\hat{\nu}_N = \underset{\nu}{\operatorname{argmin}}\, J(\hat{\alpha}_N(\nu),\nu)$$

Notons que

$$J(\alpha,\nu) = N|\alpha|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |r_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \bar{\alpha}\, e^{-i2\pi\nu n} r_n\right)$$

$\alpha \to J(\alpha,\nu)$ est une fonction quadratique, et on a ici un unique minimum obtenu en annulant la dérivée complexe $\frac{\partial J}{\partial \bar{\alpha}}(\alpha,\nu)$.

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{\alpha}}(\alpha,\nu) = 0$$

$$\Leftrightarrow N\alpha - \alpha \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{-i2\pi\nu n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha}_N(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{-i2\pi\nu n}$$

Au final,

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\nu}_N &= \underset{\nu \in [0,1]}{\operatorname{argmin}} \; J(z_N(\nu), \nu) \\ &= \underset{\nu \in [0,1]}{\operatorname{argmax}} \; \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{-i2\pi\nu n} \right|^2\end{aligned}}$$

L'estimateur MV de ν se ramène donc à rechercher la fréquence qui maximise le périodogramme du signal observé.

2) Estimation conjointe dérive / canal

→ modèle général

$$r_n = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \, s_{n-k} \, e^{i2\pi\nu n} + v_n$$

$$\underline{r} = \underline{\underline{D}}(\nu) \, \underline{\underline{S}} \, \underline{g} + \underline{v}$$

où

- $\underline{\underline{D}}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{i2\pi\nu n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i2\pi(N-1)\nu} \end{pmatrix}$

- $\underline{\underline{S}}$, $\underline{g}$, $\underline{v}$ définis comme précédemment.

→ Estimation MV conjointe

$$(\hat{\underline{q}}_N, \hat{\nu}_N) = \underset{\underline{q}, \nu}{\text{argmax}}\ f(\underline{r}; \underline{q}, \nu)$$

où

$$f(\underline{r}; \underline{q}, \nu, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma^2 \pi}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \| \underline{r} - \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}}\, \underline{q} \|^2\right)$$

On a

$$(\hat{\underline{q}}_N, \hat{\nu}_N) = \underset{(\underline{q}, \nu)}{\text{argmin}} \underbrace{\| \underline{r} - \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}}\, \underline{q} \|^2}_{J(\underline{q}, \nu)}$$

On effectue comme en section précédente une minimisation en deux temps :

- à ν fixé,

$$\hat{\underline{q}}_N(\nu) = \underset{\underline{q} \in \mathbb{C}^K}{\text{argmin}}\ J(\underline{q}, \nu)$$

$$= \left(\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)^* \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}}\right)^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)^* \underline{r}$$

$$= \left(\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{S}}\right)^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)^* \underline{r}$$

On déduit

$$\hat{\nu}_N = \underset{\nu \in [0,1]}{\operatorname{argmin}} \; J(\hat{q}_N(\nu), \nu)$$

où

$$J(\hat{q}_N(\nu), \nu)$$

$$= \| \underline{r} - \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)^* \underline{r} \|^2$$

$$= \| \underline{\underline{\Pi}}(\nu) \underline{r} \|^2$$

avec $\underline{\underline{\Pi}}(\nu) = I - \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)$

le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im}(\underline{\underline{D}}(\nu) S)^{\perp}$.

Au final, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\nu}_N &= \underset{\nu}{\operatorname{argmax}} \; \| D(\nu) S (S^* S)^{-1} S D(\nu)^* \underline{r} \|^2 \\ &= \underset{\nu}{\operatorname{argmax}} \; \underline{r}^* \underline{\underline{D}}(\nu) \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\nu)^* \underline{r} \\ \\ \underline{\hat{q}}_N &= (\underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{D}}(\hat{\nu}_N) \underline{r} \end{aligned}}$$

<u>Remarque</u> Notons que

$$S(S^*S)^{-1}S^* = TT^*$$

où $T = S(S^*S)^{-1/2}$. Alors

$$\hat{\nu}_N = \underset{\nu}{\operatorname{argmax}} \, \| T^* D(\nu)^* \underline{r} \|^2$$

$$= \underset{\nu}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \overline{T_{k+1,n+1}} \, r_n \, e^{-i2\pi\nu n} \right|^2$$

On retrouve la forme d'un périodogramme moyenné et fenêtré :

- moyennage sur K
- pondération par les coefficients de T ; la séquence d'apprentissage agit comme une fenêtre de pondération, ce qui confirme l'importance des propriétés d'autocorrélation de la séquence $s_{-K+1}, \ldots, s_{N-1}$.

On peut également montrer que, lorsque $N \to \infty$,

$$\mathbb{E} \| \hat{\underline{\theta}}_N - \underline{\theta} \|^2 = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\mathbb{E} | \hat{\nu}_N - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vraie fréquence}}}{\nu_0} |^2 = O\left(\frac{1}{N^3}\right) \leftarrow \text{vitesse très rapide}$$