# Techniques et systèmes de communications numériques sans-fil
# (TS218)

**Romain Tajan**

# Plan

## Signal émis

Expression du signal émis en **bande de base** :

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s)$$

Expression du signal émis en **bande étroite** (ou bande transposée) :

$$\tilde{s}(t) = Re\left(s(t)e^{j2\pi f_c t}\right)$$

## Notations

- $a_m$ : **symboles complexes**,
- $s(t)$ : **enveloppe complexe du signal émis**,
- $T_s$ : **temps symbole**,
- $R_s = T_s^{-1}$ : **débit symbole**,
- $h(t)$ : **filtre de mise en forme à l'émission**, (filtre demi-Nyquist)
- $f_c$ : **fréquence porteuse**.

## Signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG[1] :

$$\tilde{r}(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s)e^{j2\pi f_c(t-\tau)}\right) + \tilde{w}(t)$$

On considère une **"imperfection" au niveau du récepteur**, il récupère le signal $r(t)$ tel que

$$\tilde{r}(t) = Re\left(r(t)e^{j2\pi(f_c+\delta_f)t}\right)$$

1. Bruit Blanc Additif Gaussien

## Signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG [1] :

$$\tilde{r}(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi f_c (t-\tau)}\right) + \tilde{w}(t)$$

On considère une **"imperfection" au niveau du récepteur**, il récupère le signal $r(t)$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{r}(t) &= Re\left(r(t) e^{j2\pi(f_c+\delta_f)t}\right) \\ &= Re\left(r(t) e^{j2\pi\delta_f t} e^{j2\pi f_c t}\right) \end{aligned}$$

1. Bruit Blanc Additif Gaussien

## Signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG[1] :

$$\tilde{r}(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t-\tau-mT_s)e^{j2\pi f_c(t-\tau)}\right) + \tilde{w}(t)$$

On considère une **"imperfection" au niveau du récepteur**, il récupère le signal $r(t)$ tel que

$$\begin{aligned}\tilde{r}(t) &= Re\left(r(t)e^{j2\pi(f_c+\delta_f)t}\right)\\ &= Re\left(r(t)e^{j2\pi\delta_f t}e^{j2\pi f_c t}\right)\end{aligned}$$

$r(t)$ s'exprime donc comme suit :

$$\begin{aligned}r(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t-\tau-mT_s)e^{j2\pi(\delta_f t - f_c\tau)} + w(t)\\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t-\tau-mT_s)e^{j2\pi\delta_f t + j\phi} + w(t)\end{aligned}$$

1. Bruit Blanc Additif Gaussien

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi \delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi\delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

**Problème** :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi \delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

**Problème** :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

- $\phi$ : Déphasage entres oscillateurs aux émetteur/récepteur

  $\Rightarrow$ **Synchronisation en phase**

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi\delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

**Problème** :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

- $\phi$ : Déphasage entres oscillateurs aux émetteur/récepteur

  $\Rightarrow$ **Synchronisation en phase**

- $\tau$ : Temps de propagation du signal

  $\Rightarrow$ **Synchronisation en temps**

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi\delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

**Problème** :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

- $\phi$ : Déphasage entres oscillateurs aux émetteur/récepteur
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en phase**
- $\tau$ : Temps de propagation du signal
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en temps**
- $T_s$ : Rythme symbole
  $\Rightarrow$ **Synchronisation du rythme**

## Signal reçu bande de base dans le cas mono-trajet BBAG :

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) e^{j2\pi \delta_f t + j\phi} + w(t)$$

**But** :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles $a_n$)

**Problème** :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

- $\phi$ : Déphasage entres oscillateurs aux émetteur/récepteur
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en phase**
- $\tau$ : Temps de propagation du signal
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en temps**
- $T_s$ : Rythme symbole
  $\Rightarrow$ **Synchronisation du rythme**
- $\delta_f$ : Décalage en fréquence (effet Doppler, différences $f_c$ émetteur/récepteur)
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en fréquence**

# Plan

1. Contexte
2. Synchronisation en phase / fréquence
3. Synchronisation temporelle / récupération du rythme

# Plan

# Plan

# Problématique

- **Approche retenue pour la synchronisation**
  - Estimations des paramètres $[\tau, T_s]$ et $[\phi, \delta_f]$ réalisées séparément
  - Erreur sur $[\tau, T_s]$ négligée : **paramètres connus**

- **Autre approche possible**
  - Estimations conjointe des paramètres $[\tau, T_s, \phi, \delta_f]$
  - plus complexe, non abordé en cours

**Avant de commencer ...**

- Expression de $r(t)$

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j2\pi\delta_f t + j\phi} + w(t) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j\phi(t)} + w(t)
\end{aligned}
$$

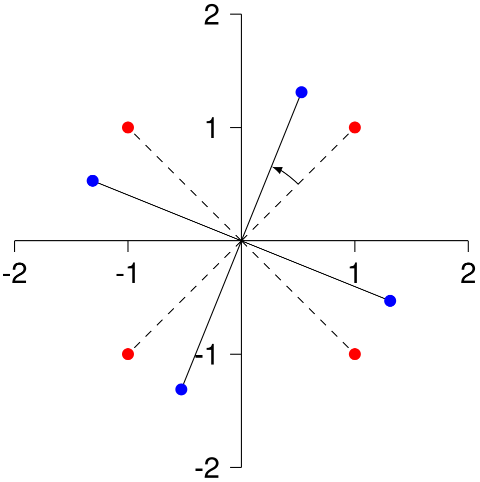
- En supposant que $h(t)$ vérifie le critère de Nyquist, un décalage fréquentiel $\delta_f \ll T_s^{-1}$ et une transmission sans bruit.

Représenter la constellation $r_k = r(kT_s)$ pour des symboles 4-QAM dans les cas suivants :

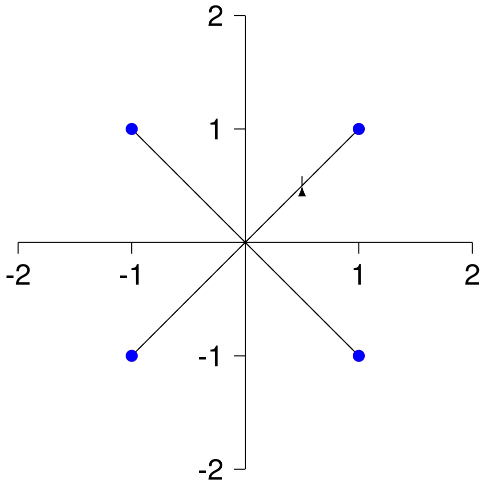
→ Déphasage constant $\phi(t) = \phi$

→ Déphasage variant linéairement dans le temps $\phi(t) = 2\pi\delta_f t + \phi_0$

# Déphasage constant



# Déphasage variant linéairement dans le temps



# Plan

On se concentre ici sur le cas d’une porteuse non modulée (avec $s(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$), le cas d’une porteuse modulée par un signal sera traité ensuite.

On se concentre ici sur le cas d'une porteuse non modulée (avec $s(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$), le cas d'une porteuse modulée par un signal sera traité ensuite.

### Expression de $r(t)$

$$r(t) = e^{j\phi(t)} + w(t) \quad \text{où} \quad \phi(t) = 2\pi\delta_f t + \phi_0.$$

$\rightarrow$ **On veut estimer** $\phi(t)$

On se concentre ici sur le cas d'une porteuse non modulée (avec $s(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$), le cas d'une porteuse modulée par un signal sera traité ensuite.

### Expression de $r(t)$

$$r(t) = e^{j\phi(t)} + w(t) \quad \text{où} \quad \phi(t) = 2\pi\delta_f t + \phi_0.$$

$\rightarrow$ **On veut estimer** $\phi(t)$

### Expression de $r_k$ (après échantillonnage de $r(t)$ avec une période $T_e$)

Sous l'hypothèse $\delta_f \in \left] \frac{-1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e} \right[$ (non-repliement)

$$r_k = e^{j\phi_k} + w_k \quad \text{où} \quad \phi_k = 2\pi\delta_f kT_e + \phi_0.$$

$\rightarrow$ **On veut estimer** $\phi_k$

## Hypothèse supplémentaire

- On fait l'hypothèse suivante :

$$\delta_f T_e \ll 1$$

$\Rightarrow \phi_k \simeq \phi$, la variable $\phi$ est inconnue aussi

$$r_k = e^{j\phi} + w_k$$

Vecteur des observations : $\mathbf{r}_k = (r_0, r_1, \dots, r_k)$

## Hypothèse supplémentaire

- On fait l'hypothèse suivante :

$$\delta_f T_e \ll 1$$

$\Rightarrow \phi_k \simeq \phi$, la variable $\phi$ est inconnue aussi

$$r_k = e^{j\phi} + w_k$$

Vecteur des observations : $\mathbf{r}_k = (r_0, r_1, \ldots, r_k)$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) =$$

## Hypothèse supplémentaire

- On fait l'hypothèse suivante :

$$\delta_f T_e \ll 1$$

$\Rightarrow \phi_k \simeq \phi$, la variable $\phi$ est inconnue aussi

$$r_k = e^{j\phi} + w_k$$

Vecteur des observations : $\mathbf{r}_k = (r_0, r_1, \ldots, r_k)$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{\left|r_n - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

## Hypothèse supplémentaire

- On fait l'hypothèse suivante :

$$\delta_f T_e \ll 1$$

$\Rightarrow \phi_k \simeq \phi$, la variable $\phi$ est inconnue aussi

$$r_k = e^{j\phi} + w_k$$

Vecteur des observations : $\mathbf{r}_k = (r_0, r_1, \ldots, r_k)$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2 \pi} \exp\left(-\frac{\left|r_n - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

## Devoir Maison - Estimation de $\phi$ par maximum de vraisemblance

$\hat{\phi}_k$ est la valeur de $\phi$ vérifiant $\dfrac{\partial}{\partial \phi} ln\left(p(\mathbf{r}_k|\phi)\right) = 0$.

## Hypothèse supplémentaire

- On fait l'hypothèse suivante :

$$\delta_f T_e \ll 1$$

$\Rightarrow \phi_k \simeq \phi$, la variable $\phi$ est inconnue aussi

$$r_k = e^{j\phi} + w_k$$

Vecteur des observations : $\mathbf{r}_k = (r_0, r_1, \ldots, r_k)$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2 \pi} \exp\left(-\frac{\left|r_n - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

## Devoir Maison - Estimation de $\phi$ par maximum de vraisemblance

$\hat{\phi}_k$ est la valeur de $\phi$ vérifiant $\frac{\partial}{\partial \phi} ln\left(p(\mathbf{r}_k|\phi)\right) = 0$.

**Montrer que** $\hat{\phi}_k = \arg\left(\sum_{n=0}^{k} r_n\right) \mod \pi$

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

Quelque soit $k > 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\hat{\phi}_k}) = 0$$

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

Quelque soit $k > 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\hat{\phi}_k}) = 0 = \sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{j(\hat{\phi}_{k-1}-\hat{\phi}_k)-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

Quelque soit $k > 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\hat{\phi}_k}) = 0 = \sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{j(\hat{\phi}_{k-1}-\hat{\phi}_k)-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

**À convergence** $\left|\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}\right| = \epsilon \ll 1 \Rightarrow Im(ze^{j\epsilon}) \sim Im(z) + \epsilon Re(z)$

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

Quelque soit $k > 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\hat{\phi}_k}) = 0 = \sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{j(\hat{\phi}_{k-1}-\hat{\phi}_k)-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

**À convergence** $\left|\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}\right| = \epsilon \ll 1 \Rightarrow Im(ze^{j\epsilon}) \sim Im(z) + \epsilon Re(z)$

$\Rightarrow \hat{\phi}_k$ **peut s'écrire récursivement :**

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \mu_k Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}}) \quad \text{avec} \quad \mu_k^{-1} = \sum_{n=0}^{k} Re(r_n e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

## Calcul récursif du Maximum de vraisemblance

**But** : calculer $\hat{\phi}_k$ à partir de $\hat{\phi}_{k-1}$

$\rightsquigarrow$ **Analyse à convergence**

Quelque soit $k > 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\hat{\phi}_k}) = 0 = \sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{j(\hat{\phi}_{k-1}-\hat{\phi}_k)-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

**À convergence** $\left|\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}\right| = \epsilon \ll 1 \Rightarrow Im(ze^{j\epsilon}) \sim Im(z) + \epsilon Re(z)$

$\Rightarrow \hat{\phi}_k$ **peut s'écrire récursivement :**

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \mu_k Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}}) \quad \text{avec} \quad \mu_k^{-1} = \sum_{n=0}^{k} Re(r_n e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

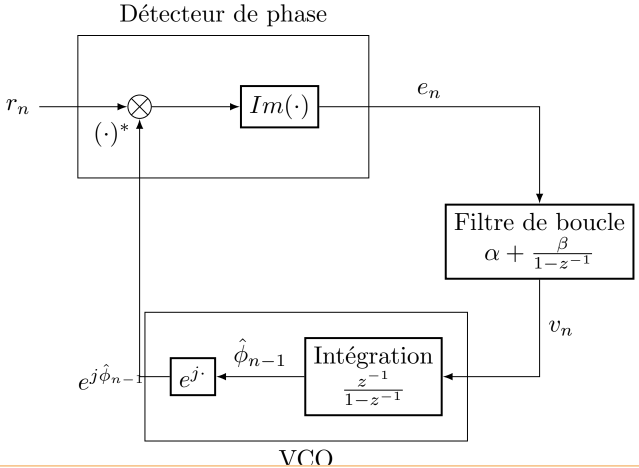
Cette relation est parfois appelée **boucle à verrouillage de phase à temps discret**.

**Ordre 1**

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \alpha Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

**Ordre 2**

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_k &= \hat{\delta}_{k-1} + \beta Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})\\ \hat{\phi}_k &= \hat{\phi}_{k-1} + \hat{\delta}_k + \alpha Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})\end{aligned}$$



# Plan

1. Contexte
2. Synchronisation en phase / fréquence
   - Contexte
   - Cas d'une porteuse non-modulée
   - Cas de la porteuse modulée
3. Synchronisation temporelle / récupération du rythme

Dans notre cas, **la porteuse est modulée**

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j2\pi\phi(t)} + w(t)$$

⇒ **On ne peut pas utiliser directement la méthode précédente sur ce signal !**

Dans notre cas, **la porteuse est modulée**

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j2\pi\phi(t)} + w(t)$$

$\Rightarrow$ **On ne peut pas utiliser directement la méthode précédente sur ce signal !**

Les solutions proposées sont les suivantes :

- $\rightarrow$ Boucle à quadrature
- $\rightarrow$ Boucle avec séquence d'apprentissage
- $\rightarrow$ Boucle à remodulation

- Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{1, -1\}$

Dans ce cas, après filtrage adapté et échantillonnage au temps $T_s$

$$r_n^2 = (a_n e^{\phi_n} + w_n)^2$$

• Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{1, -1\}$

Dans ce cas, après filtrage adapté et échantillonnage au temps $T_s$

$$r_n^2 = (a_n e^{\phi_n} + w_n)^2$$

D'où

$$r_n^2 = e^{2\phi_n} + \tilde{w}_n$$

- Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{1, -1\}$

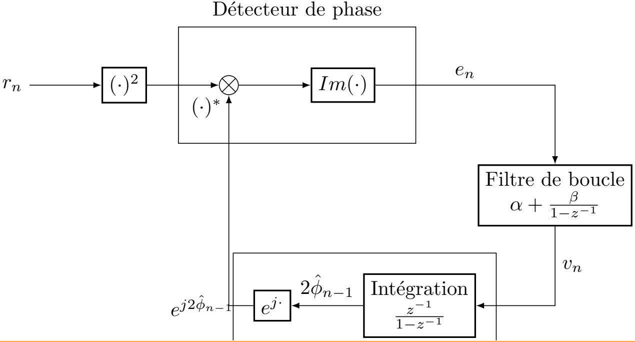
Dans ce cas, après filtrage adapté et échantillonnage au temps $T_s$

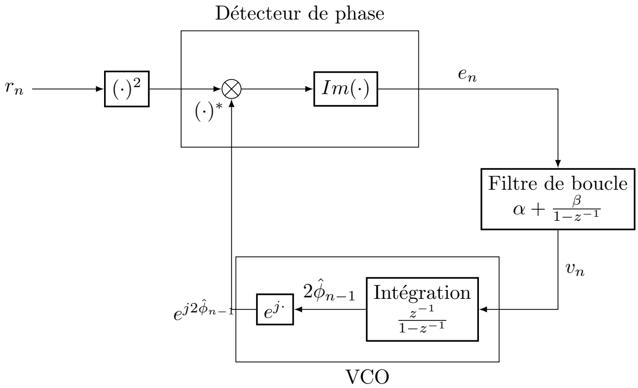
$$r_n^2 = (a_n e^{\phi_n} + w_n)^2$$

D'où

$$r_n^2 = e^{2\phi_n} + \tilde{w}_n$$

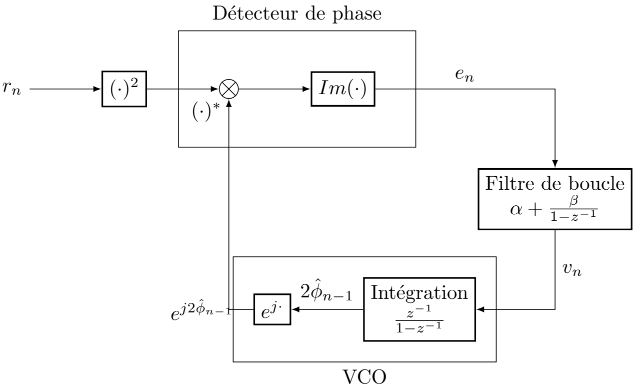
$\rightarrow$ On peut récupérer $2\phi_n$ avec une PLL






**Comment faire pour une M-PSK ?**

$$a_n \in (1, e^{j\frac{2\pi}{M}}, e^{j\frac{4\pi}{M}} \dots e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}})$$

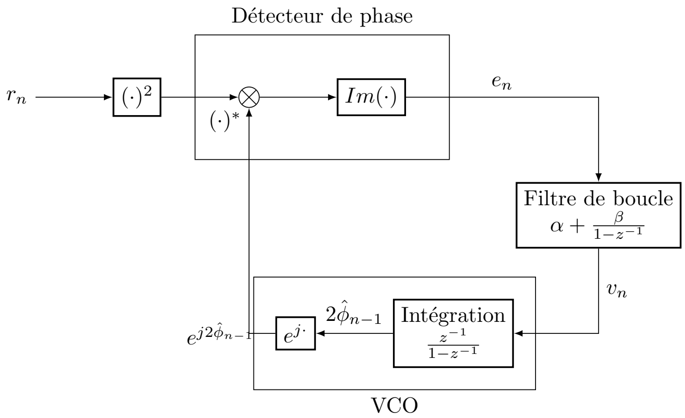



**Comment faire pour une M-PSK ?**

$$a_n \in (1, e^{j\frac{2\pi}{M}}, e^{j\frac{4\pi}{M}} \dots e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}})$$

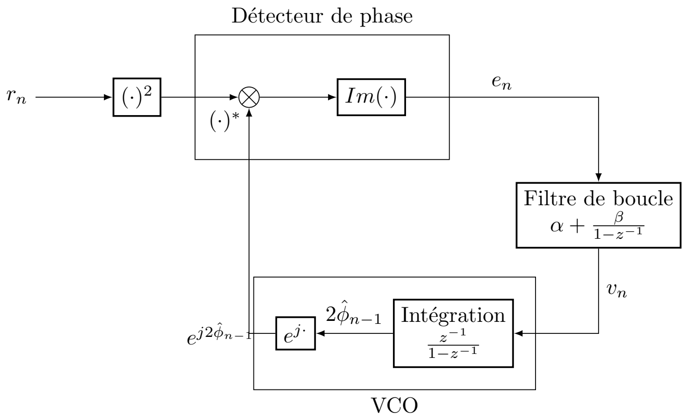
$\rightarrow$ Méthode généralisable en élevant à la puissance $M$.

# Boucle à quadrature



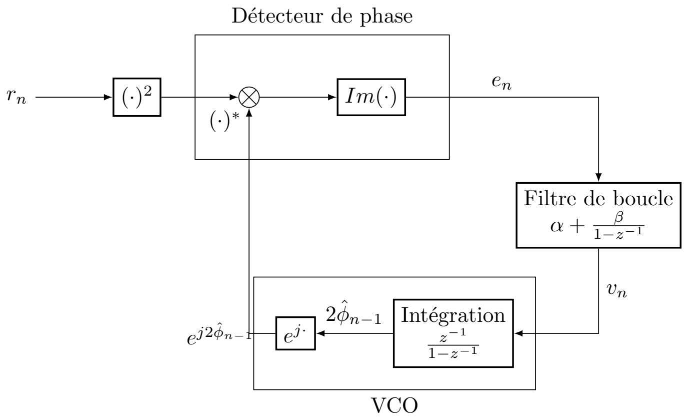

Quand la boucle est accrochée on a $\hat{\phi}_n = \phi_n \mod \pi$

# Boucle à quadrature




Quand la boucle est accrochée on a $\hat{\phi}_n = \phi_n \mod \pi$
$\Rightarrow$ **ambiguïté sur la phase**

# Boucle à quadrature




Quand la boucle est accrochée on a $\hat{\phi}_n = \phi_n \mod \pi$
$\Rightarrow$ **ambiguïté sur la phase**
$\rightarrow$ Solutions : **codage différentiel** ou **insertion de pilotes**

# Boucles sur séquence d'apprentissage / à remodulation

- Les systèmes présentés jusqu'ici sont des estimateurs **aveugles**.

$\Rightarrow$ Ils n'exploitent pas une éventuelle **séquence d'apprentissage**.

$\Rightarrow$ Ils ont une ambiguïté de phase.

# Boucles sur séquence d'apprentissage / à remodulation

- Les systèmes présentés jusqu'ici sont des estimateurs **aveugles**.

$\Rightarrow$ Ils n'exploitent pas une éventuelle **séquence d'apprentissage**.
$\Rightarrow$ Ils ont une ambiguïté de phase.

Soit une séquence d'apprentissage $\{a_n\}_{n=1\ldots N}$, en sortie de filtre adapté, et échantillonnage on peut montrer que l'estimateur MV est le suivant.

$$\hat{\phi}_k = \arctan \frac{\sum_{n=0}^{N} Im(r_n a_n^*)}{\sum_{n=0}^{N} Re(r_n a_n^*)}$$

# Boucles sur séquence d'apprentissage / à remodulation

- Les systèmes présentés jusqu'ici sont des estimateurs **aveugles**.

⇒ Ils n'exploitent pas une éventuelle **séquence d'apprentissage**.
⇒ Ils ont une ambiguïté de phase.

Soit une séquence d'apprentissage $\{a_n\}_{n=1\dots N}$, en sortie de filtre adapté, et échantillonnage on peut montrer que l'estimateur MV est le suivant.

$$\hat{\phi}_k = \arctan \frac{\sum_{n=0}^{N} Im(r_n a_n^*)}{\sum_{n=0}^{N} Re(r_n a_n^*)}$$

⇒ l'estimateur en ligne suivant :

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \mu Im(r_k a_k^* e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

# Plan

**Retour sur le signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG en bande de base :**

$$r_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) + w_l(t)$$

**But :** Estimer $\tau$ et $T_s$ $\Leftrightarrow$ estimer les instants d'échantillonnage $mT_s + \tau_m$

**Retour sur le signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG en bande de base :**

$$r_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) + w_l(t)$$

**But** :

Estimer $\tau$ et $T_s$ $\Leftrightarrow$ estimer les instants d'échantillonnage $mT_s + \tau_m$

**Contexte** :

On suppose que la synchronisation en fréquence/phase est réalisée

# Approche avec séquence d'apprentissage

**Retour sur le signal reçu en bande de base, en sortie du filtre adapté :**

$$y_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - \tau - mT_s) + w_l'(t)$$

Le critère considéré ici est le critère d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) :

$$J_{EQM}(\tau') = \mathbb{E}\left[\left|y_l(mT_s + \tau') - a_m\right|^2\right]$$

**Algorithme du Gradient Stochastique :**

# Approche avec séquence d'apprentissage

**Retour sur le signal reçu en bande de base, en sortie du filtre adapté :**

$$y_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - \tau - mT_s) + w_l'(t)$$

Le critère considéré ici est le critère d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) :

$$J_{EQM}(\tau') = \mathbb{E}\left[\left|y_l(mT_s + \tau') - a_m\right|^2\right]$$

**Algorithme du Gradient Stochastique :**

$$\tau_{m+1} = \tau_m - \mu \, \frac{d}{d\tau'} \left|y_l(mT_s + \tau') - a_m\right|^2 \Big|_{\tau' = \tau_m}$$

# Approche avec séquence d'apprentissage

**Algorithme du Gradient Stochastique (suite)** :

$$\tau_{m+1} = \tau_m - \mu Re\left( \frac{d}{dt} y_l(t)\Big|_{t=mT_s+\tau_m} [y_l(mT_s + \tau_m) - a_m]^* \right)$$

**En théorie** : La dérivée du signal reçu est obtenue à partir de la formule d'interpolation de Shannon.

# Approche avec séquence d'apprentissage

**Algorithme du Gradient Stochastique (suite)** :

$$\tau_{m+1} = \tau_m - \mu Re\left( \frac{d}{dt} y_l(t)\Big|_{t=mT_s+\tau_m} [y_l(mT_s + \tau_m) - a_m]^* \right)$$

**En théorie** : La dérivée du signal reçu est obtenue à partir de la formule d'interpolation de Shannon.

**En pratique** : On utilise une estimation par différence finie (à deux points).

# Approche sans séquence d'apprentissage

**Idée générale** : le signal $r_l(t)$ est **cyclostationnaire** de période $T_s$

$\Rightarrow$ on applique une non-linéarité à $r_l(t)$ qui fait apparaître des composantes sinusoïdales aux fréquences $\frac{k}{T_s}$

$\Rightarrow$ on récupère $1/T_s$ avec une PLL

**Exemple de non-linéarité :**

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = \sigma_a^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |g(t - mT_s - \tau)|^2 + \sigma^2$$

# Approche sans séquence d'apprentissage

**Décomposition en série de Fourier de $\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right]$ :**

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = \sum_k c_k e^{j2\pi kt/T_s}$$

avec

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] e^{-j2\pi kt/T_s} dt \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T} e^{-j2\pi \frac{k\tau}{T_s}} \int_{-\infty}^{\infty} G(f)G^*(t - \frac{k}{T_s})df + \sigma^2\delta(k) \end{aligned}$$

## Remarques

- Généralement, $c_k = 0$ pour $k > 1$, en effet le filtre de mise en forme possède généralement une bande passante inclue dans $[\frac{-1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$
- Roll-off faible $\Rightarrow |c_1| = |c_{-1}|$ faible

# Approche sans séquence d'apprentissage

## Remarque (suite)

On obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = c_0 + c_1 e^{j2\pi\frac{t}{T_s}} + c_{-1} e^{j2\pi\frac{t}{T_s}}$$

En supposant que $g(t)$ est paire on a

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = c_0 + |c_1| \cos(2\pi\frac{t-\tau}{T_s})$$

Donc

$$|r_l(t)|^2 = c_0 + |c_1| \cos(2\pi\frac{t-\tau}{T_s}) + w_l''(t)$$

$\Rightarrow$ $c_0$ est enlevé via filtrage passe haut/bande
$\Rightarrow$ $\tau/T_s$ estimés avec une PLL

Contact : Romain Tajan

- THE END -