

# TD de communications numériques

## Transmissions en bande de base

Guillaume Ferré et Romain Tajan

Au cours de ce TD vous allez vous intéresser au cas des communications numériques en bande de base. L'architecture bande de base à considérer est présentée sur la figure 1.

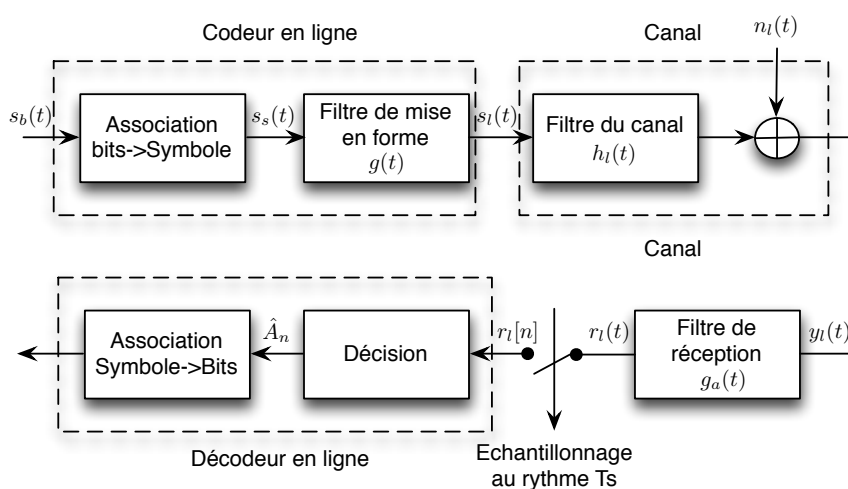


FIGURE 1 – Architecture Bande de base simplifiée

## 1 Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM

Dans cet exercice, on considère un modulateur numérique 8-PAM utilisant un étiquetage de Gray.

1. Pour cette modulation, que valent le **nombre de symboles**  $M$  et le **nombre de bits par symboles**  $n_b$ . Dans le cas général, quelle est la relation entre ces deux grandeurs.
2. Représenter la **constellation des symboles** (ensemble des symboles dans le plan complexe). Faire apparaître sur ce schéma, les étiquettes binaires associées à chacun des symboles d'un étiquetage de Gray.
3. Donner la séquence de filtre associée à la séquence binaire suivante :  $\underline{b} = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$
4. Si on souhaite transmettre les **symboles** avec un débit  $R_s = 1M \text{symbole}/s$  quel doit être le **débit binaire**?

5. On étudie maintenant le **décodeur en ligne**. Dessiner les **régions de décisions** associées à chaque symbole.
6. Si on reçoit la séquence suivante  $r_l = [3.8, -1.1, -7.4]$ , quel seront alors les séquences de symboles et de bits décidées.

## 2 Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs couramment réalisés pour le calcul de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un signal modulé en ligne.

Soit  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  la séquence des symboles délivrée par le codeur en ligne. Les symboles forment un processus à temps discret stationnaire de moyenne  $m_A = \mathbb{E}(A_k)$  et d'auto-corrélation  $R_A[k] = \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*)$ . Cette séquence étant transmise avec un débit symbole  $R_s = T_s^{-1}$ , le signal à temps continu, correspondant à cette transmission est

$$s_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(t - kT_s) \quad (1)$$

1. Exprimer  $s_l(t)$  à partir des  $A_k$  et de la réponse impulsionnelle du filtre mise en forme  $g(t)$ .
2. Calculer  $m_{s_l}(t) = \mathbb{E}(s_l(t))$ .
3. Montrer que la fonction  $t \mapsto m_{s_l}(t)$  est **périodique** de période  $T_s$ .
4. Calculer  $\bar{m}_{s_l} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} m_{s_l}(t) dt$ .
5. Calculer la fonction d'**auto-corrélation**  $R_{s_l}(t, \tau) = \mathbb{E}(s_l(t) s_l^*(t - \tau))$ .
6. Montrer que la fonction  $t \mapsto R_{s_l}(t, \tau)$  est périodique de période  $T_s$ .
7. Calculer la fonction d'**auto-corrélation moyennée**  $\bar{R}_{s_l}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{s_l}(t, \tau) dt$ .
8. En supposant que le filtre  $v(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u) g^*(u - t) du$  vérifie le critère de Nyquist, calculer la **puissance** de  $s_l(t)$ , définie par  $P_{s_l} = \bar{R}_{s_l}(0)$ .
9. Démontrer la formule de Bennet en calculant la **Densité Spectrale de Puissance (DSP)** de  $s_l(t)$ .
10. Application numérique : calculer et représenter la DSP du signal  $s_l(t)$  pour les hypothèses suivantes :
  - les symboles sont 2-PAM ( $A_k \in \{-1, 1\}$ ) uniformément et identiquement distribués
  - Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

11. Application numérique : calculer et représenter la DSP du signal  $s_l(t)$  pour les hypothèses suivantes :
  - les symboles sont 2-OOK (On Off Keying) ( $A_k \in \{0, 1\}$ ) uniformément et identiquement distribués
  - Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

### 3 Critère de Nyquist et filtrage adapté

Cet exercice a pour but d'illustrer par un exemple le **critère de Nyquist**. Le contexte que nous considérons ici est le suivant :

- le canal de propagation  $h_l(t)$  est supposé à bande passante infinie ( $h_l(t) = \delta(t)$ ),
- le filtre de mise en forme est donné par l'équation suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

1. Donner l'expression mathématique du filtre  $g_a(t)$  **adapté** à  $g(t)$ . Que faut-il faire pour rendre ce filtre **causal** ?
2. Rappeler le résultat de la convolution  $v(t)$  de  $g(t)$  avec son filtre adapté causal  $g_a(t) = g(T_s - t)$ .
3. Montrer que  $v(t)$  vérifie le **critère de Nyquist**,
4. Dessiner le signal transmis  $s_l(t)$ , le signal reçu après filtrage adapté  $r_l(t)$  et le signal numérique  $r_l[n] = r_l(nT_s)$  pour la séquence de symboles trouvée dans la question 3 de l'exercice 1.
5. Qu'entraîne la causalité des couples de filtres (mise en forme et adapté) sur la réception du premier symbole à estimer ?

### 4 Probabilité d'erreur et récepteur optimal

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs de la probabilité d'erreur. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Le filtre de réception  $g_a(t)$  est le filtre adapté à  $g(t)$ ,
- Le filtre  $v(t)$  vérifie le critère de Nyquist,
- Le bruit  $n_l(t)$  est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance  $\Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2}$ ,
- Le bruit  $n_l'[k]$  en sortie de filtre adapté et échantillonnage au temps  $T_s$  est gaussien moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ ,

1. Exprimer  $r_l[n]$ , le  $n^{\text{ième}}$  échantillon de  $r_l(t)$  échantillonné à  $T_s$ , à partir de  $A_n$ , de  $v(t)$  et du bruit,
2. Démontrer l'expression de la probabilité d'erreur binaire  $P_b$  en fonction de  $\gamma = \frac{g_0^2}{\sigma^2}$  pour une 2-PAM,
3. Démontrer que  $\sigma_{n_l}^2 = \frac{N_0}{2}$ ,
4. Calculer la fonction d'autocorrélation du bruit AWGN  $n_l(t)$ ,
5. Faire le même calcul à partir des échantillons discrets :  
 $n_l'(kT_s) = \int_{\mathbb{R}} n_l(u)g_a(kT_s - u)du$  du bruit filtré puis échantillonné au rythme  $T_s$ . Le résultat est-il en accord avec les hypothèses de début d'énoncé ?
6. Dédire des questions précédentes l'expression de la probabilité d'erreur binaire  $P_b$  en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  pour une 2-PAM, dans le cadre d'un récepteur optimal.

## 5 Étude pratique

Dans la pratique les signaux à traiter sont discrets. Les écritures précédentes des signaux à temps continu n'ont qu'un intérêt pédagogique et permettent de ne pas alourdir les calculs théoriques. Dans cette partie, vous allez à partir des résultats théoriques précédents faire l'analyse pratique d'une communication numérique en bande de base. Aux hypothèses précédentes, nous rajoutons désormais les suivantes :

⇒ Hypothèses :

- La fréquence d'échantillonnage du CNA est :  $f_e = \frac{1}{T_e} = 8\text{kHz} \Rightarrow$  les versions discrètes  $s_l[n]$  et  $g[n]$  respectivement du signal  $s_l(t)$  et du filtre  $g(t)$  sont donc obtenues par échantillonnage à  $T_e = 1/f_e$ ,
- Les filtres  $g(t)$  et  $g_a(t)$  sont les mêmes que ceux utilisés lors de l'étude théorique,
- Le débit symbole  $D_s = 2\text{kSymboles/s} \Rightarrow T_s = 0.5\text{ms}$ ,
- La séquence de bits à émettre est de durée finie et vaut :  $\underline{b} = [0100100111]$ ,
- On considère que les symboles émis appartiennent à une constellation 4-PAM  $\Rightarrow M = 4$  et  $\forall k A_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$ ,
- Tous les vecteurs considérés seront des vecteurs lignes.

⇒ Questions pratiques :

1. Quelle est la période d'échantillonnage de  $\underline{b}$ ?
2. Quel est le nombre de symbole à émettre ?
3. Si on note  $\underline{S}$  le vecteur de symboles à émettre, donner les valeurs de  $\underline{S}$ , en déduire sa dimension,
4. Quelle est la période d'échantillonnage de  $\underline{S}$  ?
5. Quelle est l'expression discrète de  $g[n]$ , en déduire l'expression du vecteur  $\underline{g}$  contenant les échantillons de  $g[n]$ . On notera  $F_{se}$  le nombre d'échantillons de  $\underline{g}$ ,
6. On souhaite que l'énergie des filtres ( $g(t)$  et  $g_a(t)$ ) soit normalisée, quel facteur de normalisation doit être appliqué à  $\underline{g}$  ?
7. Tracer l'allure du signal continu  $s_l(t)$ , en déduire son allure discrète,
8. Calculer et la tracer la convolution de  $\underline{g}$  avec  $\underline{S}$ . Que constatez-vous ?
9. Que devez vous faire pour que le résultat soit cohérent avec l'allure attendu de  $s_l[n]$  ?
10. Représenter l'allure de la DSP de  $s_l[n]$ ,
11. Si on définit la largeur de bande de  $s_l[n]$  comme étant égale à la largeur du lobe principal de la DSP, combien vaut-elle ?
12. On considère que la variance du bruit AWGN vaut  $\sigma_{n_l}^2 = 1/16$ , tracer dans ce cas la constellation des symboles détectés  $r_l[n]$  dans un intervalle de confiance de  $\pm 3\sigma_{n_l}$  autour de chaque symbole possible (soit 99,7% de confiance).
13. Dans les conditions précédentes de bruit, que pensez-vous de la fiabilité de cette communication numérique ?